

Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 2. Februar 2017

Aufgabe 44

mündlich

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in \text{SCW}$), falls ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in \text{P}$ und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : x\#y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x\#M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

- (a) $\text{SAT} \in \text{SCW}$.
- (b) Jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
- (c) Jede Sprache $A \in \text{PSK} \cap \text{SCW}$ hat eine witness-Funktion in PSK , d.h. es existieren ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in \text{P}$ und eine Folge c_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit n Eingängen und $p(n)$ Ausgängen, so dass für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x\#c_n(\text{bin}(x)) \in B$.
- (d) Für jede Sprache $A = \exists B \in \text{PSK} \cap \text{SCW}$ ist die Korrektheit eines Schaltkreises c für eine geg. Eingabelänge n in co-NP entscheidbar, d.h. $\{0^n\#\text{bin}(c) \mid \forall x \in A \cap \Sigma^n : x\#c(\text{bin}(x)) \in B\} \in \text{co-NP}$.
- (e) $\text{NP}(\text{NP}(\text{PSK} \cap \text{SCW})) = \text{NP}(\text{NP})$,
- (f) SAT ist nicht in PSK enthalten, außer wenn PH auf Σ_2^P kollabiert.

Aufgabe 45

mündlich

Eine *Offline-Orakelturingmaschine* (kurz *Offline-OM*) ist eine Offline-TM mit einem zusätzlichen write-only Orakelband. Der Platzverbrauch einer Offline-OM M ist genauso definiert wie bei einer Offline-TM, wobei das Orakelband unberücksichtigt bleibt. Sei $L = L(M^A)$ die von einer $s(n)$ -platzbeschränkten Offline-OM M mit Orakel A erkannte Sprache.

- Wir sagen, M *stellt ihre Fragen deterministisch* und schreiben $L = L(M^{d(A)})$, wenn jede Teilrechnung von M beginnend mit der Ausgabe des jeweils ersten Zeichens auf dem Orakelband bis zum Übergang in den Fragezustand deterministisch ist.
- Falls M auch unter Berücksichtigung des Orakelbandes $s(n)$ -platzbeschränkt ist, nennen wir M *streng $s(n)$ -platzbeschränkt* und schreiben $L = L(M^{s(A)})$.

Entsprechend erhalten wir die relativierten Klassen $\text{DSPACE}^A(s(n))$, $\text{DSPACE}^{d(A)}(s(n))$ und $\text{DSPACE}^{s(A)}(s(n))$, sowie $\text{NSPACE}^A(s(n))$, $\text{NSPACE}^{d(A)}(s(n))$ und $\text{NSPACE}^{s(A)}(s(n))$.

Zeigen Sie:

- (a) $\text{DSPACE}^{s(A)}(s(n)) \subseteq \text{DSPACE}^{d(A)}(s(n)) = \text{DSPACE}^A(s(n))$.
- (b) $\text{NSPACE}^{s(A)}(s(n)) \subseteq \text{NSPACE}^{d(A)}(s(n)) \subseteq \text{NSPACE}^A(s(n))$.
- (c) Für jedes Orakel A gilt $\text{L}^A \subseteq \text{NL}^{d(A)} \subseteq \text{P}^A$ und $\text{NL}^A \subseteq \text{NP}^A$.
- (d) Es gibt ein Orakel A mit $\text{NL}^A \not\subseteq \text{P}^A$.
- (e) Es gibt ein Orakel B mit $\text{NL}^B \not\subseteq \text{DSPACE}^B(\log^2(n))$.

Aufgabe 46

10 Punkte

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $\text{perm}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid y \text{ ist Permutation eines } x \in L\}$. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes L existiert ein $T_L \in \text{TALLY}$, sodass $\text{perm}(L) \leq_m^{\log} T_L$.
- (b) Ist P unter perm abgeschlossen, so gibt es für jedes $T \in \text{TALLY} \cap \text{NP}$ eine Sprache $B \in \text{P}$, auf die T disjunktiv reduzierbar ist.
- (c) P ist genau dann unter perm abgeschlossen, falls $\text{E} = \text{NE}$.

Hinweis: Nutzen Sie [Aufgabe 16](#).