

Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 24. November 2016

Aufgabe 17

mündlich

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

- (1) Jede boolesche Formel über den Junktoren \neg , \vee und \wedge ist eine Q-Formel.
- (2) Ist G eine Q-Formel, so auch $\exists xG$ und $\forall xG$.

Sei F eine Q-Formel mit freien Variablen x_1, \dots, x_n und sei $a = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$ eine Belegung. Der Wert von F unter a ist dann

- $F(a)$, falls F quantorenfrei ist,
- $G(a0) \vee G(a1)$, falls $F = \exists y G(x_1, \dots, x_n, y)$ ist, und
- $G(a0) \wedge G(a1)$, falls $F = \forall y G(x_1, \dots, x_n, y)$ ist.

Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas) in PSPACE entscheidbar ist:

Gegeben: Eine Q-Formel F

Gefragt: Ist F unter allen Belegungen wahr?

Aufgabe 18

mündlich

Seien Φ und Φ' zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion r gibt, so dass für alle Turingmaschinen M und für fast alle x gilt: $\Phi(M, x) \leq r(x, \Phi'(M, x))$.

Aufgabe 19

mündlich

Seien $f, g, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $f(n), g(n), t(n) \geq n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ mit $\# \notin \Sigma$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $A \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \Leftrightarrow A_t \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(n)))$.
- (b) Die Inklusion $\text{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(g(n)))$ impliziert $\text{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(g(t(n))))$.
- (c) Die Inklusion $\text{DTIME}(\mathcal{O}(n^k \log^a n)) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(n^k))$ impliziert im Fall $k \geq 1$ und $a > 0$ für alle $i, j \geq 1$ folgende Inklusionen:
 - (1) $\text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n))$,
 - (2) $\text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n + jan})) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n + (j-1)an}))$,
 - (3) $\text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n + in})) \subseteq \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n}))$.
- (d) $\text{DTIME}(n^k) \subsetneq \text{DTIME}(n^k \log^a n)$ für alle $k \geq 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 20

mündlich

Zeigen Sie, dass aus $E = NE$ folgt, dass $EXP = NEXP$ ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Konstruktion aus [Aufgabe 19](#), um eine beliebige Sprache $A \in NEXP$ in eine geeignete Sprache $A_t \in NE$ zu transformieren.)

Aufgabe 21

10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t \rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0, 1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

- (a) K ist E-vollständig.
- (b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.
- (c) E ist nicht unter \leq_m^{\log} abgeschlossen.