

Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2015/16

Vorlesung

- | | | | | |
|---------|-------|--------|-------|-----------------|
| • Mo,Mi | 15-17 | RUD 26 | 0'115 | Johannes Köbler |
|---------|-------|--------|-------|-----------------|

Übungen

- | | | | | |
|------|-------|--------|-------|------------------|
| • Mo | 09-11 | RUD 26 | 0'313 | Frank Fuhlbrück |
| • Mo | 09-11 | RUD 26 | 1'303 | Robert Prüfer |
| • Mo | 13-15 | RUD 26 | 0'313 | Frank Fuhlbrück |
| • Di | 11-13 | RUD 26 | 1'306 | Robert Prüfer |
| • Mi | 09-11 | RUD 26 | 0'313 | Robert Prüfer |
| • Mi | 09-11 | RUD 26 | 1'303 | Berit Grußien |
| • Do | 09-11 | RUD 26 | 0'313 | Wolfgang Kössler |
| • Do | 11-13 | RUD 26 | 0'313 | Wolfgang Kössler |
| • Fr | 09-11 | RUD 26 | 1'305 | Berit Grußien |

Tutorien

- | | | | | |
|------|-------|--------|-------|--------------|
| • Mo | 13-15 | RUD 26 | 0'310 | Michael Jung |
| • Mi | 13-15 | RUD 26 | 0'310 | Michael Jung |
| • Mi | 17-19 | RUD 26 | 0'307 | Michael Jung |
| • Fr | 15-17 | RUD 26 | 1'303 | Michael Jung |

- u.hu-berlin.de/ethi15

bzw.

- [www.informatik.hu-berlin.de/forschung/
gebiete/algorithmenII/Lehre/ws15/einftheo](http://www.informatik.hu-berlin.de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws15/einftheo)

Übungen (Anmeldung über GOYA erforderlich)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- in der VL, auf GOYA und der VL-Webseite

Bearbeitung

- in Gruppen von **zwei bis drei** Teilnehmern
- Teilnehmer müssen **nicht** in der gleichen Übungsgruppe sein
- bitte **Übungsgruppe**, Namen und Matrikelnr. angeben
- bitte jede Aufgabe auf einem **separaten** Blatt bearbeiten

Abgabe (bitte nur in Papierform)

- bis **15:10 Uhr** hier im Hörsaal (Abgabetermin s. Aufgabenblatt)

Rückgabe

- in den Übungsgruppen

Schein, Klausur, Skript

Scheinkriterien

- Lösen von $\geq 50\%$ der schriftlichen Aufgaben,
- Erfolgreiches Vorrechnen von ≥ 2 mündl. Aufgaben.

Klausur

- **Termin: 19.02.2016**
- **Zulassung** nur mit Übungsschein
- Nachklausur: 22.03.2016

Skript

- wird wöchentlich ins Netz gestellt.

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Themen dieser VL:

- Welche Rechenmodelle sind adäquat? **Automatentheorie**
- Welche Probleme sind lösbar? **Berechenbarkeitstheorie**
- Welcher Aufwand ist nötig? **Komplexitätstheorie**

Themen der VL Algorithmen und Datenstrukturen:

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? **Algorithmik**

Themen der VL Logik in der Informatik:

- Mathem. Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung
Aussagenlogik, Prädikatenlogik

- Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle.
- Es gibt viele unterschiedliche math. Modelle.
- Diese können sich in der Berechnungskraft unterscheiden.
- Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann.
- Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.
 - endliche Automaten (DFA, NFA),
 - Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

- Der Begriff **Algorithmus** geht auf den persischen Gelehrten **Muhammed Al Chwarizmi** (8./9. Jhd.) zurück.
- Ältester bekannter nicht-trivialer Algorithmus:
Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.).
- Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er bei jeder zulässigen **Problemeingabe** nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte **Ausgabe** liefert.
- Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein.
- Diese werden über einem Eingabealphabet Σ kodiert.

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine geordnete endliche Menge

$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}, \quad m \geq 1$$

von **Zeichen** a_i .

- Eine Folge $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^n$ heißt **Wort** (der **Länge** n).
- Die Menge aller Wörter über Σ ist

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n.$$

- Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das **leere Wort**, welches wir mit ε bezeichnen, d.h. $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$.
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **Sprache** über dem Alphabet Σ .

Beispiel

Sei Σ ein Alphabet.

- Dann sind \emptyset , Σ^* , Σ und $\{\varepsilon\}$ Sprachen über Σ .
 - \emptyset enthält keine Wörter und heißt **leere Sprache**.
 - Σ^* enthält dagegen alle Wörter über Σ .
 - Σ enthält alle Wörter über Σ der Länge 1.
 - $\{\varepsilon\}$ enthält nur das leere Wort, ist also einelementig.
- Solche Sprachen werden auch als **Singleton-Sprachen** bezeichnet.

- Da Sprachen Mengen sind, können wir sie bzgl. Inklusion vergleichen.
- Zum Beispiel gilt $\emptyset \subseteq \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*$.
- Wir können Sprachen auch vereinigen, schneiden und komplementieren.
- Seien A und B Sprachen über Σ . Dann ist
 - $A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \wedge x \in B\}$ der **Schnitt** von A und B ,
 - $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\}$ die **Vereinigung** von A und B , und
 - $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$ das **Komplement** von A .

Definition

Seien $x = x_1 \dots x_n$ und $y = y_1 \dots y_m$ Wörter. Dann wird das Wort $x \circ y = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$ als **Konkatenation** von x und y bezeichnet. Für $x \circ y$ schreiben wir auch einfach xy .

Beispiel

- Für $x = aba$ und $y = abab$ erhalten wir $xy = abaabab$ und $yx = abababa$.
- Die Konkatenation ist also nicht kommutativ.
- Allerdings ist \circ assoziativ, d.h. es gilt $x(yz) = (xy)z$.
Daher können wir hierfür auch einfach xyz schreiben.
- Es gibt auch ein neutrales Element, da $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ ist.
- Eine algebraische Struktur (M, \square, e) mit einer assoziativen Operation $\square : M \times M \rightarrow M$ und einem neutralen Element e heißt **Monoid**.
- $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ ist also ein Monoid.

Neben den Mengenoperationen Schnitt, Vereinigung und Komplement gibt es auch spezielle Sprachoperationen.

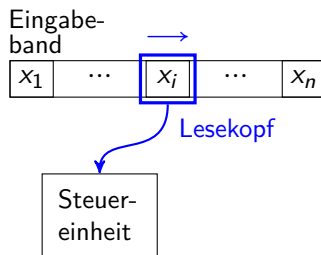
Definition

- Das **Produkt** (**Verkettung**, **Konkatenation**) der Sprachen A und B ist $AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$.
- Ist $A = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für $\{x\}B$ auch einfach xB .
- Die **n -fache Potenz** A^n einer Sprache A ist induktiv definiert durch

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ A^{n-1}A, & n > 0. \end{cases}$$

- Die **Sternhülle** von A ist $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.
- Die **Plushülle** von A ist $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n = AA^*$.

- Ein einfaches Rechenmodell zum Erkennen von Sprachen ist der endliche Automat.



- Ein endlicher Automat
 - nimmt zu jedem Zeitpunkt genau einen von endlich vielen Zuständen an,
 - macht bei Eingaben der Länge n genau n Rechenschritte und
 - liest in jedem Schritt genau ein Eingabezeichen.

Definition

- Ein **endlicher Automat** (kurz: **DFA**; *Deterministic Finite Automaton*) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei
 - $Z \neq \emptyset$ eine **endliche** Menge von **Zuständen**,
 - Σ das **Eingabealphabet**,
 - $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z$ die **Überföhrungsfunktion**,
 - $q_0 \in Z$ der **Startzustand** und
 - $E \subseteq Z$ die Menge der **Endzustände** ist.
- Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

- Eine Zustandsfolge q_0, q_1, \dots, q_n heißt **Rechnung** von $M(x_1 \dots x_n)$, falls $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt.
- Sie heißt **akzeptierend**, falls $q_n \in E$ ist.

Frage

Welche Sprachen lassen sich durch endliche Automaten erkennen und welche nicht?

Definition

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als **regulär** bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

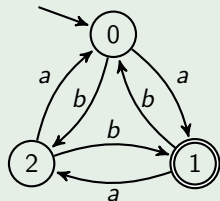
$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Beispiel

Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ ein DFA mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überföhrungsfunktion

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Endzustände werden durch einen doppelten Kreis und der Startzustand wird durch einen Pfeil gekennzeichnet.

Frage: Welche Wörter akzeptiert M_3 ?

- $w_1 = aba$? Ja (Rechnung: $0, 1, 0, 1$).
- $w_2 = abba$? Nein (Rechnung: $0, 1, 0, 2, 0$).

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}, \text{ wobei}$$

- $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen von a in x bezeichnet und
- $i \equiv_m j$ (in Worten: i ist kongruent zu j modulo m) bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist.

Beweis der Behauptung durch Induktion über die Länge von x

Wir betrachten zunächst das Erreichbarkeitsproblem für DFAs.

Frage

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$. Welchen Zustand erreicht M bei Eingabe x nach i Schritten?

Antwort

- nach 0 Schritten: q_0 ,
- nach 1 Schritt: $\delta(q_0, x_1)$,
- nach 2 Schritten: $\delta(\delta(q_0, x_1), x_2)$,
- nach i Schritten: $\delta(\dots \delta(\delta(q_0, x_1), x_2), \dots x_i)$.

Definition

- Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird.
- Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$$

induktiv über die Länge von x wie folgt definieren.

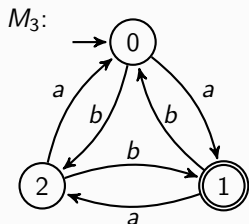
- Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a).\end{aligned}$$

- Die von M erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

schreiben.



Behauptung

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}.$$

Beweis

- 1 ist der einzige Endzustand von M .
- Daher ist $L(M_3) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$.
- Obige Behauptung ist also äquivalent zu

$$\hat{\delta}(0, x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1$$

- Folglich reicht es, folgende Kongruenzgleichung zu zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$$

Beweis von $\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$:

Wir führen Induktion über die Länge n von x .

Induktionsanfang $n = 0$: klar, da $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n + 1$:

- Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$.
- Nach IV gilt $i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n)$.
- Wegen $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$ und $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$ folgt daher

$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &= \#_a(x) - \#_b(x) \end{aligned}$$

und somit

$$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

Vereinbarung

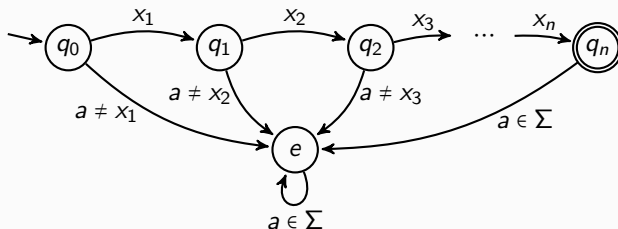
Für das Folgende sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ ein fest gewähltes Alphabet.

Beobachtung 1

Alle Sprachen, die nur ein Wort $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ enthalten, sind regulär.

Beweis

Folgender DFA M erkennt die Sprache $L(M) = \{x\}$:



Beobachtung 2

Ist $L \in \text{REG}$, so ist auch die Sprache $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ regulär.

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann wird das Komplement \bar{L} von L von dem DFA $\bar{M} = (Z, \Sigma, \delta, q_0, Z \setminus E)$ akzeptiert.

□

Definition

Für eine Sprachklasse \mathcal{C} bezeichne $\text{co-}\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in \mathcal{C} .

Korollar

$\text{co-REG} = \text{REG}$.

Beobachtung 3

Sind $L_1, L_2 \in \text{REG}$, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis

- Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_i, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Dann wird der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

erkannt.

- M wird auch als **Kreuzproduktautomat** bezeichnet.

Beobachtung 4

Die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ von regulären Sprachen L_1 und L_2 ist regulär.

Beweis

Es gilt $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$.

□

Frage

Wie sieht der zugehörige DFA aus?

Antwort

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), (E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)).$$

Abschlusseigenschaften von Sprachklassen

Definition

- Ein (*k*-stelliger) **Sprachoperator** ist eine Abbildung op , die k Sprachen L_1, \dots, L_k auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.
- Eine Sprachklasse \mathcal{K} heißt unter op **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

- Der **Abschluss** von \mathcal{K} unter op ist die (bzgl. Inklusion) kleinste Sprachklasse \mathcal{K}' , die \mathcal{K} enthält und unter op abgeschlossen ist.

Beispiel

- Der 2-stellige Schnittoperator \cap bildet L_1 und L_2 auf $L_1 \cap L_2$ ab.
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter \cap besteht aus allen Singletonsprachen und der leeren Sprache.
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter \cup besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen.

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Schnitt,
- Vereinigung.

Folgerung

- Aus den Beobachtungen folgt, dass alle **endlichen** und alle **co-endlichen** Sprachen regulär sind.
- Da die reguläre Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Wie umfangreich ist REG?

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee

Ein **nichtdeterministischer** Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „raten“.

Verbleibendes Problem

Zeige, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

- Ein **nichtdet. endl. Automat** (kurz: **NFA**; *Nondet. Finite Automaton*)

$$N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$$

ist genau so aufgebaut wie ein DFA, nur dass er

- eine Menge $Q_0 \subseteq Z$ von Startzuständen hat und
- die Überföhrungsfunktion folgende Form hat:

$$\Delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z).$$

- Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die **Potenzmenge** (also die Menge aller Teilmengen) von Z . Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet.
- Die von einem NFA N **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1}) \text{ f\"ur } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

- Eine Zustandsfolge q_0, q_1, \dots, q_n heißt **Rechnung** von $N(x_1 \dots x_n)$, falls $q_0 \in Q_0$ und $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt.

- Ein NFA N kann bei einer Eingabe x also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen.
- Ein Wort x gehört genau dann zu $L(N)$, wenn $N(x)$ mindestens eine akzeptierende Rechnung hat.
- Im Gegensatz zu einem DFA, der jede Eingabe zu Ende liest, kann ein NFA N „stecken bleiben“.
- Dieser Fall tritt ein, wenn N in einen Zustand q gelangt, in dem er das nächste Eingabezeichen x_i wegen

$$\Delta(q, x_i) = \emptyset$$

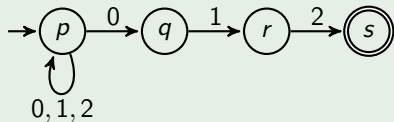
nicht verarbeiten kann.

Beispiel

- Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ mit $Z = \{p, q, r, s\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $Q_0 = \{p\}$, $E = \{s\}$ und der Überföhrungsfunktion

Δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\{p\}$	$\{r\}$	\emptyset	\emptyset
2	$\{p\}$	\emptyset	$\{s\}$	\emptyset

Graphische Darstellung:



- Dann ist $L(M) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ die Sprache aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden.



Beobachtung 5

Seien $N_i = (Z_i, \Sigma, \Delta_i, Q_i, E_i)$ NFAs mit $L(N_i) = L_i$ für $i = 1, 2$. Dann wird auch das Produkt $L_1 L_2$ von einem NFA erkannt.

Beweis

- Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ annehmen.
- Dann gilt $L(N) = L_1 L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \emptyset, \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eigenschaften von NFAs

- Dann gilt $L(N) = L_1 L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $E = E_2$, falls $Q_2 \cap E_2 = \emptyset$, bzw. $E = E_1 \cup E_2$ sonst.

Beweis von $L_1 L_2 \subseteq L(N)$:

- Seien $x = x_1 \cdots x_k \in L_1, y = y_1 \cdots y_l \in L_2$ und seien q_0, \dots, q_k und p_0, \dots, p_l akzeptierende Rechnungen von $N_1(x)$ und $N_2(y)$.
- Dann gilt $q_0 \in Q_1, q_k \in E_1$ und $p_0 \in Q_2, p_l \in E_2$.
- Im Fall $l \geq 1$ ist zudem $p_1 \in \Delta_2(p_0, y_1)$ und somit $p_1 \in \Delta(q_k, y_1)$.
- Im Fall $l = 0$ ist zudem $p_l \in Q_2 \cap E_2$ und somit $q_k \in E$.
- Also ist $q_0, \dots, q_k, p_1, \dots, p_l$ eine akzeptierende Rechnung von $N(xy)$.

Eigenschaften von NFAs

- Dann gilt $L(N) = L_1 L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $E = E_2$, falls $Q_2 \cap E_2 = \emptyset$, bzw. $E = E_1 \cup E_2$ sonst.

Beweis von $L(N) \subseteq L_1 L_2$:

- Sei $x = x_1 \cdots x_n \in L(N)$ und sei q_0, \dots, q_n eine akz. Rechnung von $N(x)$.
- Dann gilt $q_0 \in Q_1$, $q_n \in E$, $q_0, \dots, q_i \in Z_1$ und $q_{i+1}, \dots, q_n \in Z_2$ für ein i .
- Im Fall $i = n$ ist $q_n \in E_1$ (d.h. $x \in L_1$) und $Q_2 \cap E_2 \neq \emptyset$ (d.h. $\varepsilon \in L_2$).
- Im Fall $i < n$ impliziert der Übergang $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$, dass $q_i \in E_1$ und $q_{i+1} \in \Delta_2(q, x_{i+1})$ für ein $q \in Q_2$ ist.
- Also ist q_0, \dots, q_i eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \cdots x_i)$ und q, q_{i+1}, \dots, q_n eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \cdots x_n)$, d.h. $x \in L_1 L_2$. □

Beobachtung 6

Ist $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA, so wird auch die Sprache $L(N)^*$ von einem NFA erkannt.

Beweis

Die Sprache $L(N)^*$ wird von dem NFA

$$N' = (Z \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \Delta', Q_0 \cup \{q_{neu}\}, E \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\Delta'(p, a) = \begin{cases} \Delta(p, a), & p \in Z \setminus E, \\ \Delta(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_0} \Delta(q, a), & p \in E, \\ \emptyset, & p = q_{neu} \end{cases}$$

erkannt.

Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee (bereits umgesetzt)

Ein **nichtdeterministischer** Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „raten“.

Noch zu zeigen

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen.

Satz (Rabin und Scott)

$\text{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$

Beweis von $\text{REG} \subseteq \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Diese Inklusion ist klar, da jeder DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ leicht in einen äquivalenten NFA

$$N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$$

transformiert werden kann, indem wir $\Delta(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ und $Q_0 = \{q_0\}$ setzen. □

Für die umgekehrte Inklusion ist das **Erreichbarkeitsproblem für NFAs** von zentraler Bedeutung.

Frage

Sei $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $x = x_1 \dots x_n$ eine Eingabe. Welche Zustände sind in i Schritten erreichbar?

Antwort

- in 0 Schritten: alle Zustände in Q_0 .
- in einem Schritt: alle Zustände in

$$Q_1 = \bigcup_{q \in Q_0} \Delta(q, x_1).$$

- in i Schritten: alle Zustände in

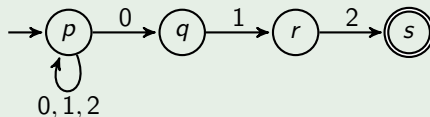
$$Q_i = \bigcup_{q \in Q_{i-1}} \Delta(q, x_i).$$

Idee

- Wir können einen NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ durch einen DFA $M = (Z', \Sigma, \delta, q'_0, E')$ simulieren, der in seinem Zustand die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte.
- Die Zustände von M sind also Teilmengen Q von Z (d.h. $Z' = \mathcal{P}(Z)$) mit Q_0 als Startzustand (d.h. $q'_0 = Q_0$) und der Endzustandsmenge $E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$.
- Die Überföhrungsfunktion $\delta : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ von M berechnet dann für einen Zustand $Q \subseteq Z$ und ein Zeichen $a \in \Sigma$ die Menge
$$\delta(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q, a)$$
aller Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest.
- M wird auch als der zu N gehörige **Potenzmengenautomat** bezeichnet.

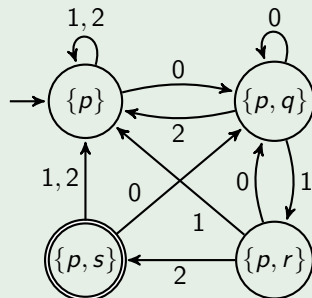
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



Bemerkung

- Im obigen Beispiel werden für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten nur 4 der insgesamt

$$\|\mathcal{P}(Z)\| = 2^{\|Z\|} = 2^4 = 16$$

Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände nicht erreichbar sind.

- Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände benötigt werden (siehe Übungen).

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Beweis von $\{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\} \subseteq \text{REG}$

- Sei $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta, Q_0, E')$ der zugehörige Potenzmengenautomat mit $\delta(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q, a)$ und $E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$.
- Dann folgt die Korrektheit von M leicht mittels folgender Behauptung, die wir auf der nächsten Folie beweisen.

Behauptung

$\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

- Für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt

$x \in L(N)$	\Leftrightarrow	N kann nach Lesen von x einen Endzustand erreichen
	$\stackrel{\text{Beh.}}{\Leftrightarrow}$	$\hat{\delta}(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset$
	\Leftrightarrow	$\hat{\delta}(Q_0, x) \in E'$
	\Leftrightarrow	$x \in L(M)$.

Beweis der Behauptung

Behauptung

$\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

Beweis durch Induktion über die Länge n von x

$n = 0$: klar, da $\hat{\delta}(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Sei $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Nach IV enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}(Q_0, x_1 \dots x_{n-1})$$

die Zustände, die N nach Lesen von $x_1 \dots x_{n-1}$ erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}(Q_0, x) = \delta(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \Delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}(Q_0, x)$ die Zustände, die N nach Lesen von x erreichen kann. □

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Schnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endl. Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar ist.

Bereits gezeigt:

Jede Sprache, die mittels der Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle (sowie Schnitt und Komplement) angewandt auf endliche Sprachen darstellbar ist, ist regulär.

Noch zu zeigen:

Jede reguläre Sprache lässt sich aus endlichen Sprachen mittels Vereinigung, Produkt und Sternhülle erzeugen.

Konstruktive Charakterisierung von REG

Induktive Definition der Menge RA_{Σ} aller regulären Ausdrücke über Σ

Die Symbole \emptyset , ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke über Σ , die

- die leere Sprache $L(\emptyset) = \emptyset$,
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und
- für jedes $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$ beschreiben.

Sind α und β reguläre Ausdrücke über Σ , die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke über Σ , die folgende Sprachen beschreiben:

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
- $L((\alpha|\beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$,
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$.

Bemerkung

RA_{Σ} ist eine Sprache über dem Alphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, |, *, (,)\}$.

Reguläre Ausdrücke

Beispiel

Die regulären Ausdrücke $(\epsilon)^*$, $(\emptyset)^*$, $(0|1)^*00$ und $(0|(\epsilon 0|\emptyset(1)^*))$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	$(\epsilon)^*$	$(\emptyset)^*$	$(0 1)^*00$	$(0 (\epsilon 0 \emptyset(1)^*))$
$L(\gamma)$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$



Vereinbarungen

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende **Präzedenzordnung**: Der Sternoperator $*$ bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator.
- Für $(0|(\epsilon 0|\emptyset(1)^*))$ können wir also kurz $0|\epsilon 0|\emptyset 1^*$ schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$.

Satz

$\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck über } \Sigma\} \subseteq \text{REG}.$

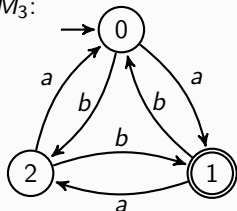
Beweis.

Klar, da

- die Basisausdrücke \emptyset , ϵ und a , $a \in \Sigma^*$, reguläre Sprachen beschreiben und
- die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist.



M_3 :



Frage

Wie lässt sich die Sprache

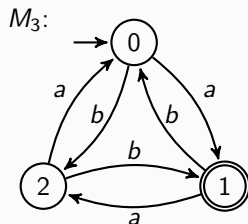
$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

durch einen regulären Ausdruck beschreiben?

Antwort

- Sei $L_{p,q}$ die Sprache aller Wörter x , die M_3 vom Zustand p in den Zustand q überführen (d.h. $L_{p,q} = \{x \in \{a, b\}^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$).
- Weiter sei $L_{p,q}^{\neq r}$ die Sprache aller Wörter $x = x_1 \cdots x_n \in L_{p,q}$, die hierzu nur Zustände ungleich r benutzen (d.h. $\hat{\delta}(p, x_1 \cdots x_i) \neq r$ für $i = 1, \dots, n-1$).
- Dann gilt $L(M_3) = L_{0,1} = L_{0,0} L_{0,1}^{\neq 0}$ und $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$, also $L(M_3) = (L_{0,0}^{\neq 0})^* L_{0,1}^{\neq 0}$.

Antwort (Fortsetzung)



- Dann gilt $L(M_3) = (L_{0,0}^{\neq 0})^* L_{0,1}^{\neq 0}$.
- $L_{0,1}^{\neq 0}$ und $L_{0,0}^{\neq 0}$ lassen sich durch folgende reguläre Ausdrücke beschreiben:

$$\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*,$$

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb) \mid \varepsilon.$$

- Also ist $L(M_3)$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreibbar:

$$\gamma_{0,1} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^* (a|bb)(ab)^*.$$

Satz

$\text{REG} \subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}.$

Beweis

- Wir konstruieren zu einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$.
- Wir nehmen an, dass $Z = \{1, \dots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist.
- Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form $L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$ darstellen.

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ anzugeben.

Satz

$\text{REG} \subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}.$

Beweis (Fortsetzung)

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ anzugeben.
- Hierzu betrachten wir für $r = 0, \dots, m$ die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \{x \in L_{p,q} \mid \text{für } i = 1, \dots, n-1 \text{ ist } \hat{\delta}(p, x_1 \dots x_i) \leq r\}.$$

- Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}^r$ mit $1 \leq p, q \leq m$ und $0 \leq r \leq m$ anzugeben.
- Wir zeigen induktiv über r , dass die Sprachen $L_{p,q}^r$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

Satz

 $\text{REG} \subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}.$

Beweis (Schluss)

- Wir zeigen induktiv über r , dass die Sprachen $L_{p,q}^r$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

$r = 0$: In diesem Fall sind die Sprachen

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\}, & p \neq q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

endlich und somit durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

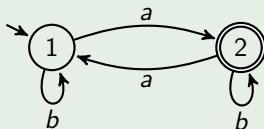
$r \rightsquigarrow r+1$: Wegen

$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r$$

sind mit $L_{p,q}^r$, $1 \leq p, q \leq m$, auch die Sprachen $L_{p,q}^{r+1}$, $1 \leq p, q \leq m$, durch reguläre Ausdrücke beschreibbar. \square

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^2.$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Um reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ zu bestimmen, benutzen wir für $r \geq 0$ die Rekursionsformel

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r | \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r.$$

- Damit erhalten wir

$$\gamma_{1,2}^2 = \gamma_{1,2}^1 | \gamma_{1,2}^1 (\gamma_{2,2}^1)^* \gamma_{2,2}^1,$$

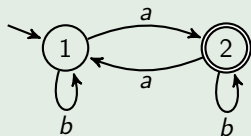
$$\gamma_{1,2}^1 = \gamma_{1,2}^0 | \gamma_{1,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0,$$

$$\gamma_{2,2}^1 = \gamma_{2,2}^0 | \gamma_{2,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0.$$

- Es genügt also, die regulären Ausdrücke $\gamma_{1,1}^0$, $\gamma_{1,2}^0$, $\gamma_{2,1}^0$, $\gamma_{2,2}^0$, $\gamma_{1,2}^1$, $\gamma_{2,2}^1$ und $\gamma_{1,2}^2$ zu berechnen.

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

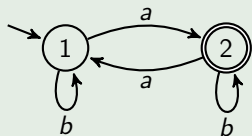
$$L_{p,p}^0 = \{a \mid \delta(p, a) = p\} \cup \{\varepsilon\},$$

$$L_{p,q}^0 = \{a \mid \delta(p, a) = q\} \text{ für } p \neq q,$$

$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r.$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0				
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M 

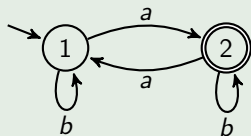
Rekursionsformeln

$$L_{1,1}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(1, a) = 1\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

$$\leadsto \gamma_{1,1}^0 = \varepsilon|b$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	εb			
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M 

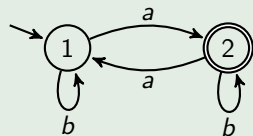
Rekursionsformeln

$$L_{1,2}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(1, a) = 2\} = \{a\}$$

$$\leadsto \gamma_{1,2}^0 = a$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a		
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M 

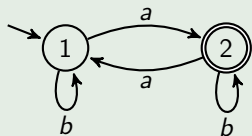
Rekursionsformeln

$$L_{2,1}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(2, a) = 1\} = \{a\}$$

$$\leadsto \gamma_{2,1}^0 = a$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M 

Rekursionsformeln

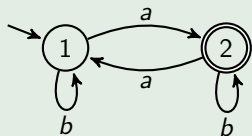
$$L_{2,2}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(2, a) = 2\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

$$\leadsto \gamma_{2,2}^0 = \varepsilon|b$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	εb	a	a	εb
1	-			
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



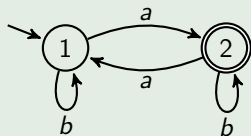
Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1,2}^1 &= \gamma_{1,2}^0 | \gamma_{1,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0 \\
 &= a | (\epsilon | b) (\epsilon | b)^* a \\
 &\equiv b^* a
 \end{aligned}$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	ϵb
1	-	$b^* a$		
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



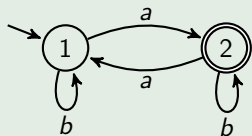
Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}
 \gamma_{2,2}^1 &= \gamma_{2,2}^0 | \gamma_{2,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0 \\
 &= (\epsilon | b) | a(\epsilon | b)^* a \\
 &\equiv \epsilon | b | ab^* a
 \end{aligned}$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	ϵb
1	-	$b^* a$	-	$\epsilon b ab^* a$
2	-			

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1,2}^2 &= \gamma_{1,2}^1 | \gamma_{1,2}^1 (\gamma_{2,2}^1)^* \gamma_{2,2}^1 \\
 &= b^* a | b^* a (\epsilon | b | ab^* a)^* (\epsilon | b | ab^* a) \\
 &\equiv b^* a (b | ab^* a)^*
 \end{aligned}$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	ϵb
1	-	$b^* a$	-	$\epsilon b ab^* a$
2	-	$b^* a (b ab^* a)^*$	-	-

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Schnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Ausblick

- Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Anzahl der Zustände eines DFA minimieren lässt.
- Da hierbei Äquivalenzrelationen eine wichtige Rolle spielen, befassen wir uns zunächst mit Relationalstrukturen.

Definition

- Sei A eine nichtleere Menge, R ist eine **k -stellige Relation auf A** , wenn $R \subseteq A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k\text{-mal}} = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A \text{ für } i = 1, \dots, k\}$ ist.
- Für $i = 1, \dots, n$ sei R_i eine k_i -stellige Relation auf A . Dann heißt $(A; R_1, \dots, R_n)$ **Relationalstruktur**.
- Die Menge A heißt der **Individuenbereich**, die **Trägermenge** oder die **Grundmenge** der Relationalstruktur.

Bemerkung

- Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten.
- Man nennt dann R eine **(binäre) Relation** auf A .
- Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die **Infix-Schreibweise** aRb benutzt.

Beispiel

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und
$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\},$$
- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und
$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\},$$
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei M eine beliebige Menge und \subseteq die Inklusionsrelation auf den Teilmengen von M ist,
- (A, Id_A) mit $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (die **Identität auf A**),
- (\mathbb{R}, \leq) ,
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h. $a|b$, falls ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ existiert).

- Da Relationen Mengen sind, können wir den **Schnitt**, die **Vereinigung**, die **Differenz** und das **Komplement** von Relationen bilden:

$$R \cap S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\},$$

$$R \cup S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\},$$

$$R - S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\},$$

$$\overline{R} = (A \times A) - R.$$

- Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A . Dann sind der **Schnitt über \mathcal{M}** und die **Vereinigung über \mathcal{M}** folgende Relationen:

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\},$$

$$\bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}.$$

Definition

- Die **transponierte (konverse) Relation** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

- R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet.
- Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.
- Das **Produkt** (oder die **Komposition**) zweier Relationen R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. \triangleleft

Notation

- Für $R \circ S$ wird auch $R ; S$, $R \cdot S$ oder einfach RS geschrieben.
- Für $\underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-mal}}$ schreiben wir auch R^n . Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht!

Das Relationenprodukt R^n sollte nicht mit dem kartesischen Produkt

$$\underbrace{R \times \dots \times R}_{n\text{-mal}}$$

verwechselt werden.

Vereinbarung

Wir vereinbaren, dass R^n das n -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Sei R eine Relation auf A . Dann heißt R

reflexiv, falls $\forall x \in A : xRx$ (also $Id_A \subseteq R$)

irreflexiv, falls $\forall x \in A : \neg xRx$ (also $Id_A \subseteq \bar{R}$)

symmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ (also $R \subseteq R^T$)

asymmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$ (also $R \subseteq \bar{R}^T$)

antisymmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (also $R \cap R^T \subseteq Id$)

konnex, falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$ (also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)

semikonnex, falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$ (also $\bar{Id} \subseteq R \cup R^T$)

transitiv, falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

Bemerkung

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Beispiel

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex und somit eine lineare Striktordnung.
- (\mathbb{R}, \leq) und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit Ordnungen.
- (\mathbb{R}, \leq) ist auch konnex und somit eine lineare Ordnung.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist zwar im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex.

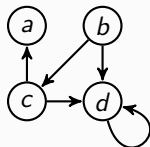


Darstellung von endlichen Relationen

Graphische Darstellung

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$



- Eine Relation R auf einer (endlichen) Menge A kann durch einen **gerichteten Graphen** (kurz **Digraphen**) $G = (A, R)$ mit **Knotenmenge** A und **Kantenmenge** R veranschaulicht werden.
- Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil).
- Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **adjazent** oder **benachbart**.

Definition

Sei R eine binäre Relation auf A .

- Die Menge der Nachfolger bzw. Vorgänger von x ist

$$R[x] = \{y \in A \mid xRy\} \text{ bzw. } R^{-1}[x] = \{y \in A \mid yRx\}.$$

- Der Ausgangsgrad eines Knotens x ist $\deg^+(x) = \|R[x]\|$.
- Der Eingangsgrad von x ist $\deg^-(x) = \|R^{-1}[x]\|$.
- Ist R symmetrisch, so können wir die Pfeilspitzen auch weglassen.
- In diesem Fall heißt $\deg(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der Grad von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ die Nachbarschaft von x in G .
- G ist schleifenfrei, falls R irreflexiv ist.
- Ist R irreflexiv und symmetrisch, so nennen wir $G = (A, R)$ einen (ungerichteten) Graphen.
- Eine irreflexive und symmetrische Relation R wird meist als Menge der ungeordneten Paare $E = \{\{a, b\} \mid aRb\}$ notiert.

Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich auch durch die boolesche $(n \times n)$ -Matrix $M_R = (m_{ij})$ darstellen mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ hat beispielsweise die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Listendarstellung (Adjazenzlisten)

R lässt sich auch durch eine Tabelle darstellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolger in Form einer Liste zuordnet.

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ lässt sich beispielsweise durch folgende Adjazenzlisten darstellen:

x :	$R[x]$
a :	-
b :	c, d
c :	a, d
d :	d

Berechnung von $R \circ S$

- Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$ -Matrizen für R und S , so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

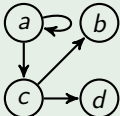
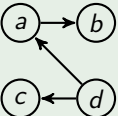
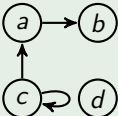
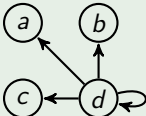
$$t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj}).$$

- Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Beispiel

Betrachte die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$ auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenzmatrix	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$
Adjazenzlisten	$\begin{aligned} a: & a, c \\ b: & - \\ c: & b, d \\ d: & - \end{aligned}$	$\begin{aligned} a: & b \\ b: & - \\ c: & - \\ d: & a, c \end{aligned}$	$\begin{aligned} a: & b \\ b: & - \\ c: & a, c \\ d: & - \end{aligned}$	$\begin{aligned} a: & - \\ b: & - \\ c: & - \\ d: & a, b, c, d \end{aligned}$

Frage

Welche Paare muss man zu einer Relation R mindestens hinzufügen, damit R transitiv wird?

Antwort

- Es ist leicht zu sehen, dass der Schnitt von transitiven Relationen wieder transitiv ist.
- Die **transitive Hülle** von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- R^+ ist also eine transitive Relation, die R enthält.
- Da R^+ zudem in jeder Relation mit diesen Eigenschaften enthalten ist, gibt es keine transitive Relation mit weniger Paaren, die R enthält.
- Da auch die Reflexivität und die Symmetrie bei der Schnittbildung erhalten bleiben, lassen sich nach demselben Muster weitere Hüllenoperatoren definieren.

Definition

Sei R eine Relation auf A .

- Die **reflexive Hülle** von R ist

$$h_{\text{refl}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **symmetrische Hülle** von R ist

$$h_{\text{sym}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **Äquivalenzhülle** von R ist

$$h_{\text{äq}}(R) = \bigcap \{E \subseteq A \times A \mid E \text{ ist eine Äquivalenzrelation mit } R \subseteq E\}.$$

Satz

$$h_{\text{refl}}(R) = R \cup \text{Id}_A, \quad h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T, \quad R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n, \quad R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Beweis

Siehe Übungen. □

Bemerkung

- Ein Paar (a, b) ist also genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R enthalten, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$.
- Dies bedeutet, dass es Elemente $x_0, \dots, x_n \in A$ gibt mit

$$x_0 = a, \quad x_n = b \quad \text{und} \quad x_0 R x_1 R x_2 \dots x_{n-1} R x_n.$$

- x_0, \dots, x_n heißt **Weg** der Länge n von a nach b .

Definition

(A, R) heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- Auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 die Parallelität.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie".
- Auf \mathbb{Z} die Relation "gleicher Rest bei Division durch m ".



Definition

- Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die **von x repräsentierte Äquivalenzklasse** und bezeichnet sie auch mit $[x]_E$ (oder einfach mit $[x]$, falls E aus dem Kontext ersichtlich ist):

$$[x]_E = [x] = E[x] = \{y \mid xEy\}.$$

- Eine Menge $S \subseteq A$ heißt **Repräsentantensystem**, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.
- Die Menge aller Äquivalenzklassen von E wird **Quotienten- oder Faktormenge** von A bzgl. E genannt und mit A/E bezeichnet:

$$A/E = \{[x]_E \mid x \in A\}.$$

- Die Anzahl $\|A/E\|$ der Äquivalenzklassen von E wird auch als der **Index von E** bezeichnet.

Beispiel

Für die weiter oben betrachteten Äquivalenzrelationen erhalten wir folgende Klasseneinteilungen:

- Für die Parallelität auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 :
alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bilden jeweils eine Äquivalenzklasse.
- Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.
- Für die Relation "im gleichen Jahr geboren wie" auf der Menge aller Menschen: jeder Jahrgang bildet eine Äquivalenzklasse.
- Für die Relation "gleicher Rest bei Division durch m " auf \mathbb{Z} :
jede der m Restklassen $[0], [1], \dots, [m-1]$ mit

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod m = r\}$$

bildet eine Äquivalenzklasse.

- Repräsentantensystem: $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

Bemerkungen

- Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die Identität Id_A , die größte ist die Allrelation $A \times A$.
- Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $[x]_{Id_A} = \{x\}$ für alle $x \in A$.
- Die Allrelation erzeugt dagegen nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $[x]_{A \times A} = A$ für alle $x \in A$.
- Die Identität Id_A hat nur ein Repräsentantensystem, nämlich A .
- Dagegen kann jede Singletonmenge $\{x\}$ mit $x \in A$ als Repräsentantensystem für die Allrelation $A \times A$ fungieren.

Wie wir sehen werden, bilden die Äquivalenzklassen eine Zerlegung von A .

Definition

Eine Familie $\{B_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $B_i \subseteq A$ heißt **Partition** (oder **Zerlegung**) der Menge A , falls gilt:

- die Mengen B_i **überdecken** A , d.h. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ und
- die Mengen B_i sind **paarweise disjunkt**, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $B_i \neq B_j$ gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Bemerkungen

- Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten.
- Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E .
- Im Fall $E \subseteq E'$ sagt man auch, E bewirkt eine **feinere** Zerlegung von A als E' .
- Demnach ist die Identität die **feinste** und die Allrelation die **größte** Äquivalenzrelation.

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

- 1 impliziert 2: Sei E eine Äquivalenzrelation auf A .

Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E[y] \subseteq E[x]$:

$$z \in E[y] \Rightarrow yEz \stackrel{xEy}{\Rightarrow} xEz \Rightarrow z \in E[x].$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E[x] \subseteq E[y]$.

Umgekehrt folgt aus $E[x] = E[y]$ wegen der Reflexivität von E , dass $y \in E[y] = E[x]$ enthalten ist, und somit xEy .

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

- 2 impliziert 3: Gelte $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$ für alle $x, y \in A$.
- Wegen $E[x] = E[x]$ folgt xEx und somit $x \in E[x]$, d.h. $A = \bigcup_{x \in A} E[x]$.
 - Ist $E[x] \cap E[y] \neq \emptyset$ und z ein Element in $E[x] \cap E[y]$, so folgt xEz und yEz und somit $E[x] = E[z] = E[y]$.
 - Folglich bildet $\{E[x] \mid x \in A\}$ eine Partition von A .
 - Zudem gilt
$$xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y] \Leftrightarrow \exists z : E[x] = E[z] = E[y] \Leftrightarrow \exists z : x, y \in E[z].$$

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

3 impliziert 1: Existiert schließlich eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$, so ist E

- reflexiv, da zu jedem $x \in A$ eine Menge B_i mit $x \in B_i$ existiert,
- symmetrisch, da aus $x, y \in B_i$ auch $y, x \in B_i$ folgt, und
- transitiv, da aus $x, y \in B_i$ und $y, z \in B_j$ wegen $y \in B_i \cap B_j$ die Gleichheit $B_i = B_j$ und somit $x, z \in B_i$ folgt. □