HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN Einführung in die Theoretische Informatik
PROF. DR. JOHANNES KÖBLER 1. Februar 2016

Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 19. 2. 2016 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Nachklausurtermin: 22. 3. 2016 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'115 (die Nachklausur kann auch ohne Teilnahme an der ersten Klausur mitgeschrieben werden).
- Anmeldung in Agnes nur mit Übungsschein (d.h. „bestanden“ im Studienblatt bzw. 1190 Punkte in Goya) bis 12.2.2016 (Klausur) bzw. 15.3.2016 (Nachklausur).
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.
- Als Hilfsmittel sind eigene Notizen (auch gedruckt) und Skript erlaubt. Bücher und elektronische Geräte (Taschenrechner, Handy etc.) sind **nicht** zugelassen.
- Am 15.2.2016 ab 10 Uhr findet eine Fragestunde statt.
- Zusätzlich gibt es am 14.2.2016 (Sonntag) von 11-17 Uhr die Gelegenheit zum betreuten Üben mit Michael Robert Jung im Raum 3.101, RUD 25.

Aufgabe 1 Betrachten Sie den nebenstehenden NFA N. ***30 Punkte***

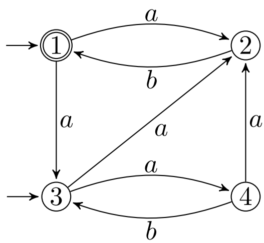
(a) Welche der Wörter ε, ba, aab und $aabb$ sind in $L(N)$?

(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA M um.

(c) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der VL.

(d) Geben Sie für jedes Paar $x, y \in \{\varepsilon, ba, aabb, aaab, aaabb\}$ an, ob xR_Ly gilt oder nicht. Begründen Sie.

(e) Geben Sie ein Repräsentantensystem für R_L an.



(f) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.

Aufgabe 2 Für $\Sigma = \{\langle, \rangle, [,]\}$ sei $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ ***10 Punkte***

mit P: $S \to \langle S\rangle, [S], SS, \varepsilon$

$[\langle \to \langle[$

Zeigen Sie, dass $L(G)$ kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 3 Sei $A = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. ***10 Punkte***

Geben Sie eine DTM M mit $L(M) = A$ an und kommentieren Sie die Funktionsweise.

Aufgabe 4 Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen. ***12 Punkte***

Für diese sei $\text{embed}(A, B) = \left\{xwy \in \Sigma^* \,\middle|\, w \in A \wedge xy \in B\right\}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $B \in \mathsf{CFL}$, so ist auch $\text{embed}(\{\#\}, B)$ kontextfrei.

(b) Wenn $A, B \in \mathsf{CFL}$, so gilt auch $\text{embed}(A, B) \in \mathsf{CFL}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie (a).)

Aufgabe 5 Seien A, B und C beliebige Sprachen. ***12 Punkte***

Gelten folgende Aussagen jeweils? Begründen Sie kurz.

(a) $(B \in \mathsf{CFL}$ und $A \leq^p B) \Rightarrow A \in \mathsf{NP}$.

(b) $(A \leq^p B$ und $A \leq^p C) \Rightarrow A \leq^p B \cap C$.

(c) Gibt es eine Funktion f in FP, die A auf B und A auf C reduziert, so gilt $A \leq^p B \cap C$.

(d) $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \textsc{Sat} \leq^p \{a\}$

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass folgendes Problem NP-vollständig ist. ***10 Punkte***

QuadratClique: **Gegeben:** Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
Gefragt: Enthält G eine Clique der Größe $k^2 + k$?

Aufgabe 7 ***15 Punkte***

(a) Beweisen Sie, dass co-RE unter $\leq$ abgeschlossen ist.

(b) Für $w \in \{0,1\}^*$ sei f_w die durch die DTM M_w berechnete partielle Funktion. Sei $\tilde{f}_w$ die *einstellige numerische Repräsentation* von f_w, d.h. falls eine Funktion $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ existiert, sodass $f_w = \hat{g}$, ist $\tilde{f}_w = g$, sonst ist $\tilde{f}_w$ die konstante Nullfunktion.

Bestimmen Sie welche der folgenden Sprachen entscheidbar sind. Begründen Sie.

(1) $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \tilde{f}_w \text{ ist WHILE-berechenbar}\right\}$

(2) $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \tilde{f}_w \text{ ist LOOP-berechenbar}\right\}$

(3) $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{Bei jeder Eingabe besucht } M_w \text{ seinen Startzustand erneut.}\right\}$

(4) $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \exists w', w'' \in \{0,1\}^* \colon w = w'w'' \text{ und } L(M_{w'}) = L(M_{w'w''})\right\}$

Aufgabe 8 Sei G der nebenstehende Graph. ***21 Punkte***

(a) Bestimmen Sie folgende Parameter und begründen Sie.

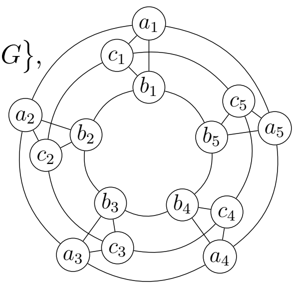
(1) $\beta(G) = \min\left\{ \|U\| \;\middle|\; U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\right\}$,

(2) $\chi(G) = \min\left\{k \geq 1 \;\middle|\; G \text{ ist } k\text{-färbbar}\right\}$,

(3) $\mu(G) = \max\left\{ \|M\| \;\middle|\; M \text{ ist ein Matching in } G\right\}$,

(4) $\omega(G) = \max\left\{ \|C\| \;\middle|\; C \text{ ist eine Clique in } G\right\}$,

(5) $\alpha(G) = \max\left\{ \|S\| \;\middle|\; S \text{ ist stabil in } G\right\}$.



(b) Besitzt G eine Eulertour/einen Hamiltonkreis? Geben Sie eine/einen an, oder begründen Sie falls keine/keiner existiert.

(c) Geben Sie einen Subgraphen von G an, der zu folgendem Graphen isomorph ist.