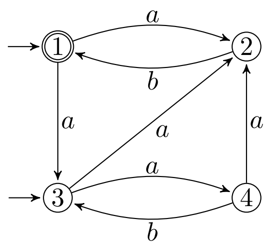
Probeklausur: Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 Betrachten Sie den nebenstehenden NFA N. ***30 Punkte***



(a) Welche der Wörter ε, ba, aab und $aabb$ sind in $L(N)$?

(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA M um.

(c) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der VL.

(d) Geben Sie für jedes Paar $x, y \in \{\varepsilon, ba, aabb, aaab, aaabb\}$ an, ob xR_Ly gilt oder nicht. Begründen Sie.

(e) Geben Sie ein Repräsentantensystem für R_L an.

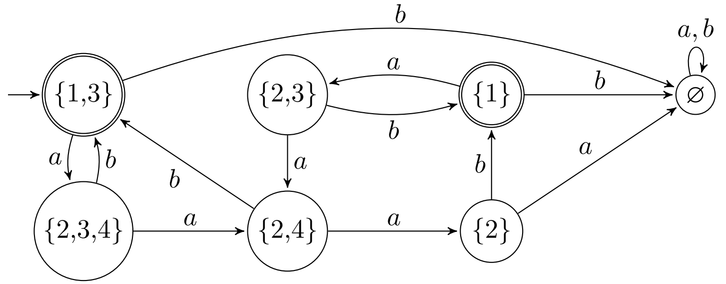
(f) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.

Lösung:

(a) ε und aab sind enthalten, die anderen beiden nicht.

(b)

M:

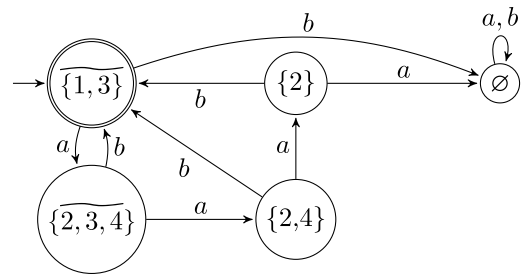


(c) In der folgenden Tabelle sind für trennbare Zustände p, q jeweils Wörter aus $L(M)_p \triangle L(M)_q$ angegeben. Die Länge entspricht der Runde des Algorithmus, in der die Inäquivalenz festgestellt wird.

$\{2,4\}$	aab					
$\{2,3\}$		aab				
$\{2\}$	ab	ab	ab			
$\{1,3\}$	ε	ε	ε	ε		
$\{1\}$	ε	ε	ε	ε		
$\varnothing$	b	b	b	b	ε	ε
	$\{2,3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{1\}$

Damit gilt: $\{2,3,4\} \sim \{2,3\}, \{1\} \sim \{1,3\}$. Der resultierende Automat ist:

M':



(d)

x	ε	ba	$aabb$	$aaab$	$aaabb$
$\hat\delta_{M'}(\widetilde{\{1,3\}}, x)$ (d.h. Zustand nach Eingabe von x)	$\widetilde{\{1,3\}}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\widetilde{\{1,3\}}$	$\varnothing$

Wie immer gilt xR_Lx für alle $x \in \{\varepsilon, ba, aabb, aaab, aaabb\}$, da R_L reflexiv ist. Weiter gilt xR_Ly für alle $x, y \in \{ba, aabb, aaabb\}$, da der Minimalautomat M' für all diese x und y in den Zustand $\varnothing$ geht. Ebenso gilt $\varepsilon R_L aaab$ und $aaabR_L\varepsilon$, da M' für ε und $aaab$ in den Zustand $\widetilde{\{1,3\}}$ geht. Für jedes andere Paar x, y gilt nicht xR_Ly, da M' für x und y in verschiedene Zustände geht.

(e) z.B. $\{ab, aba, aa, aaa, aaaa\}$ oder $\{\varepsilon, a, b, aa, aaa\}$.

(f) $((a|aa|aaa)b)^*$

Aufgabe 2 Für $\Sigma = \{\langle, \rangle, [,]\}$ sei $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ ***10 Punkte***

mit $P:$ $S \to \langle S\rangle,\ [S], SS, \varepsilon$

$[\langle \to \langle[$

Zeigen Sie, dass $L(G)$ kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei ist.

Lösung:

- $L(G) \in \mathsf{CSL}$: $G' = (\{S_0, S\}, \Sigma, P', S_0)$ ist eine kontextsensitive Grammatik, wobei

  $$\begin{aligned} P': \quad & S_0 \to S, \varepsilon \\ & S \to \langle S\rangle,\ [S], SS, \langle\rangle, [] \\ & [\langle \to \langle[\end{aligned}$$

  Es gilt $L(G') = L(G)$, da G' nur solche und fast alle solche Regeln enthält, die man aus Regeln aus G konstruieren kann, wenn man ein oder mehrerer S auf der rechten Seite durch ε ersetzt. Die Regel $S \to S$ (entstanden aus $S \to SS$) kann entfallen, da sie an der Satzform nichts ändert, die Regel $S \to \varepsilon$ wurde durch $S_0 \to \varepsilon$ ersetzt. Es folgt, dass $L(G')$ und somit $L(G)$ kontextsensitiv ist.
- $L(G) \notin \mathsf{CFL}$: Angenommen $L(G)$ wäre kontextfrei, dann gäbe es nach dem Pumping-Lemma eine Zahl l, sodass sich alle Wörter der Länge mind. l pumpen lassen. Für diese Zahl l betrachte das Wort $z = \langle^l[^l\rangle^l]^l$. Dieses ist in $L(G)$: $S \Rightarrow^l [^lS]^l \Rightarrow^{l+1} [^l\langle^l\rangle^l]^l \Rightarrow^{l^2} z$. Das Wort z lässt sich nicht pumpen, da für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \le l$ das Wort $z' = uv^0wx^0y$ nicht zu $L(G)$ gehört. Denn:
  - Wegen $|vwx| \le l$ können in vx nicht gleichzeitig die Zeichen [und] bzw ⟨ und ⟩ vorkommen.
  - Falls o.B.d.A. [in vx auftritt ($vx \neq \varepsilon$), dann ist kein] in vx. Somit gilt $\#_](z') = \#_](z) = l = \#_[(z) > \#_[(z')$. Also kann z' somit nicht zu $L(G)$ gehören, da die einzige Regel, die ein] erzeugt auch ein [erzeugt und somit deren Anzahl immer gleich ist.

  Somit kann $L(G)$ nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 3 Sei $A = \{a^nb^m \mid n, m \ge 0, m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. ***10 Punkte***

Geben Sie eine DTM M mit $L(M) = A$ an und kommentieren Sie die Funktionsweise.

Lösung:

1-DTM $M = (\{q_0, \ldots, q_4, q_e\}, \{a, b\}, \{a, b, A, B, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_e\})$ wobei δ wie folgt definiert ist:

Laufe zum ersten b und markiere dieses:

$$\begin{aligned} q_0a &\to q_0aR \\ q_0A &\to q_0AR \\ q_0B &\to q_0BR \\ q_0b &\to q_1BL \end{aligned}$$

Gehe nach links, markiere zwei as (müssen ex., wenn M akzeptieren soll):

$$\begin{aligned} q_1B &\to q_1BL \\ q_1A &\to q_1AL \\ q_1a &\to q_2AL \\ q_2a &\to q_0AR \end{aligned}$$

Falls kein b mehr gefunden wird, gucke ob maximal ein a übrig:

$$\begin{aligned} q_0\sqcup &\to q_3\sqcup L \\ q_3A &\to q_3AL \\ q_3B &\to q_3BL \\ q_3\sqcup &\to q_e\sqcup N \\ q_3a &\to q_4AL \\ q_4\sqcup &\to q_e\sqcup N \end{aligned}$$

Alternative Lösung mit 2-DTM:

2-DTM $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_e\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_e\})$ wobei δ wie folgt definiert ist:

Kopiere jedes zweite a auf Band 2:

$$\begin{aligned} q_0a\sqcup &\to q_1a\sqcup RN \\ q_1a\sqcup &\to q_0aaRR \end{aligned}$$

Beim Erreichen des ersten bs bzw ersten $\sqcup$s versetze den Kopf von Band 2 um eins Feld nach links:

$$\begin{aligned} q_0b\sqcup &\to q_2b\sqcup NL \\ q_1b\sqcup &\to q_2b\sqcup NL \\ q_0\sqcup\sqcup &\to q_2\sqcup\sqcup NL \\ q_1\sqcup\sqcup &\to q_2\sqcup\sqcup NL \end{aligned}$$

Teste, ob die Anzahl der as auf Band 2 gleich der Anzahl bs auf Band 1 ist (gehe nach R auf Band 1, nach L auf Band 2):

$$\begin{aligned} q_2ba &\to q_2baRL \\ q_2\sqcup\sqcup &\to q_e\sqcup\sqcup NN \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen. ***12 Punkte***
Für diese sei $\text{embed}(A,B) = \left\{xwy \in \Sigma^* \,\middle|\, w \in A \wedge xy \in B\right\}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $B \in \mathsf{CFL}$, so ist auch $\text{embed}(\{\#\}, B)$ kontextfrei.

Lösung:
Da B kontextfrei ist, existiert ein PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \$)$ mit $L(M) = B$. Wir ersetzen jeden Zustand q von M durch Zustände q' und q'', die speichern, ob das eingebettete $\#$ bereits gelesen wurde. Das Lesen selbst wird durch $q'\#A \to q''A$ für alle $A \in \Gamma(M)$ und alle $q \in Z$ realisiert. Um das Lesen von $\#$ zu garantieren, legen wir vorab ein neues Symbol auf den Kellerboden, das von allen q'' per Epsilonübergang entfernt werden kann.

(b) Wenn $A, B \in \mathsf{CFL}$, so gilt auch $\text{embed}(A,B) \in \mathsf{CFL}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie (a).)

Lösung:
Für A existiert eine kontextfreie Grammatik G_1 mit Startsymbol S. Nach 4.a ist mit B auch $\text{embed}(\{S\}, B)$ kontextfrei. Sei G_2 eine kontextfreie Grammatik für $\text{embed}(\{S\}, B)$, wobei $V_{G_2} \cap (\Sigma_{G_1} \cup V_{G_1}) = \varnothing$ sowie $\Sigma_{G_2} \cap V_{G_1} = \{S\}$ gelten und S' das Startsymbol von G_2 ist. Wir konstruieren aus G_1 und G_2 eine Grammatik $G_3 = (V_1 \cup V_2, \Sigma_1 \cup (\Sigma_2 \setminus \{S\}), P, S')$, indem wir S nur als Variable nutzen und beide Regelmengen zu P vereinigen.
Jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G_3)$ muss genau einen Ableitungsschritt der Form $uS\beta \Rightarrow u\alpha\beta$ enthalten, wobei $u\beta$ in G_2 zu einem Wort $uw \in B$ ableitbar ist. Da das Teilwort v von x, welches aus S abgeleitet wird, in A enthalten ist, folgt $x = uvw \in \text{embed}(A,B)$. Andererseits gibt es für jedes Wort $x = uvw \in \text{embed}(A,B)$ mit $v \in A$ und $uw \in B$ eine Ableitung $S \Rightarrow^* v$ in G_1, die wir mit der Ableitung $S' \Rightarrow^* uSw$ in G_2 zu einer Ableitung von uvw in G_3 ergänzen können.

Aufgabe 5 Seien A, B und C beliebige Sprachen. ***12 Punkte***
Gelten folgende Aussagen jeweils? Begründen Sie kurz.

(a) $(B \in \mathsf{CFL}$ und $A \leq^p B) \Rightarrow A \in \mathsf{NP}$.

(b) $(A \leq^p B$ und $A \leq^p C) \Rightarrow A \leq^p B \cap C$.

(c) Gibt es eine Funktion f in FP, die A auf B und A auf C reduziert, so gilt $A \leq^p B \cap C$.

(d) $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \textsc{Sat} \leq^p \{a\}$

Lösung:

(a) **Ja**: $\mathsf{CFL} \subset P$ wurde in den ÜA gezeigt, P ist unter $\leq^p$ abgeschlossen und $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

(b) **Nein**: Wähle $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0\}$. Für $A \leq^p B$ ist z.B. die Identitätsfunktion id, und für $A \leq^p C$ z.B. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Reduktionsfunktion.
Beide sind offensichtlich in Polynomialzeit berechenbar. Es gibt allerdings keine (Polynomialzeit-)Reduktion die A auf $B \cap C$, d.h. $\{a\}$ auf $\varnothing$, reduziert.

(c) **Ja**: Es gilt:

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \in C \Rightarrow f(x) \in B \cap C$$
$$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin B \wedge f(x) \notin C \Rightarrow f(x) \notin B \cup C \Rightarrow f(x) \notin B \cap C$$

und somit reduziert f auch A auf $B \cap C$.

(d) **Ja**: Falls $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, so existiert eine Polynomialzeit-DTM für $\textsc{Sat}$, die sich in eine DTM für f umwandeln lässt mit $f(w_F) = a$, falls $w_F \in \textsc{Sat}$ und $f(w_F) = \varepsilon$ sonst. Dieses f ist dann die Reduktionsfunktion für $\textsc{Sat} \leq^p \{a\}$.

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass folgendes Problem NP-vollständig ist. ***10 Punkte***
$\textsc{QuadratClique}$: **Gegeben:** Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
Gefragt: Enthält G eine Clique der Größe $k^2 + k$?

Lösung:

- $\textsc{QuadratClique} \in \mathsf{NP}$: Eine NTM für das Problem berechnet bei Eingabe $G = (V, E)$ und k zunächst $l = k^2 + k$ und rät eine Knotenmenge V' der Größe l. Anschließend testet sie, ob für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt, dass $\{u, v\}$ eine Kante in G ist.
- $\textsc{QuadratClique}$ ist NP-schwer: Wir zeigen $\textsc{Clique} \leq^p \textsc{QuadratClique}$. Sei $w \in \Sigma^*$. Falls w kein Paar (G, k) aus Graph G und natürlicher Zahl k codiert oder falls k größer als die Knotenzahl von G ist, so bilden wir auf die Kodierung des Paars $((\{v\}, \{\}), 1)$ ab (d.h. Graph mit nur einem Knoten, aber gesucht ist 2-Clique). Ansonsten wird (G, k) auf (G', k) abgebildet, wobei G' aus G entsteht indem eine k^2-Clique hinzugenommen wird und mit allen Knoten aus G verbunden wird. Dann hat G' genau dann eine $(k^2 + k)$-Clique, wenn G eine k-Clique hat.
Alternativ kann G' auch gebildet werden, indem man jeden Knoten v von G durch eine $(k+1)$-Clique C_v ersetzt und zwei Knoten w, x aus verschiedenen Cliquen C_v bzw. C_u verbindet, wenn u und v verbunden waren. Dann hat G genau dann eine k-Clique, wenn G' eine $(k(k+1))$-Clique hat (also eine k-Clique aus $(k+1)$-Cliquen).

Aufgabe 7 ***15 Punkte***

(a) Beweisen Sie, dass co-RE unter $\leq$ abgeschlossen ist.

(b) Für $w \in \{0,1\}^*$ sei f_w die durch die DTM M_w berechnete partielle Funktion. Sei $\tilde{f}_w$ die *einstellige numerische Repräsentation* von f_w, d.h. falls eine Funktion $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ existiert, sodass $f_w = \hat{g}$, ist $\tilde{f}_w = g$, sonst ist $\tilde{f}_w$ die konstante Nullfunktion.

Bestimmen Sie welche der folgenden Sprachen entscheidbar sind. Begründen Sie.

(1) $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \tilde{f}_w \text{ ist WHILE-berechenbar}\right\}$

(2) $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \tilde{f}_w \text{ ist LOOP-berechenbar}\right\}$

(3) $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \text{Bei jeder Eingabe besucht } M_w \text{ seinen Startzustand erneut.}\right\}$

(4) $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists w', w'' \in \{0,1\}^* \colon w = w'w'' \text{ und } L(M_{w'}) = L(M_{w'w''})\right\}$

Lösung:

(a) Zu zeigen: $(A \leq L$ und $L \in$ co-RE$) \Rightarrow A \in$ co-RE.

$$
\begin{aligned}
& A \leq L \text{ und } L \in \text{co-RE} && \\
\Rightarrow\, & A \leq L \text{ und } \bar{L} \in \text{RE} && \text{(Definition co-RE)}\\
\Rightarrow\, & \bar{A} \leq \bar{L} \text{ und } \bar{L} \in \text{RE} && \text{(aus Übungsaufgabe bekannt)}\\
\Rightarrow\, & \bar{A} \in \text{RE} && \text{(RE ist unter } \leq \text{ abgeschlossen)}\\
\Rightarrow\, & A \in \text{co-RE} && \text{(Definition co-RE)}
\end{aligned}
$$

(b) (1) Entscheidbar:

Für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& M_w \text{ berechnet die partielle Funktion } f_w\\
\Rightarrow\quad & f_w \text{ ist (Turing)-berechenbar}\\
\Rightarrow\quad & \tilde{f}_w \text{ ist GOTO-berechenbar}\\
\Rightarrow\quad & \tilde{f}_w \text{ ist WHILE-berechenbar}
\end{aligned}
$$

Somit gilt $L_1 = \{0,1\}^*$, und L_1 ist entscheidbar.

(2) Nicht entscheidbar:

Benutze Satz von Rice. Sei $\mathcal{F} = \{f \mid \tilde{f} \text{ ist LOOP-berechenbar}\}$. Dann gilt $L_\mathcal{F} = L_2$. $\mathcal{F}$ ist nicht trivial:

$L_\mathcal{F} \neq \emptyset$, denn z.B. $\tilde{f}_1$ mit $\tilde{f}_1(x) := x$ für alle x ist LOOP-berechenbar.

$L_\mathcal{F} \neq \{0,1\}^*$, denn z.B. die Ackermannfunktion $\tilde{a}$ oder $\tilde{f}_2$ mit $\tilde{f}_2(x) := \uparrow$ für alle x ist nicht LOOP-berechenbar, aber WHILE-berechenbar, und damit $a = \hat{\tilde{a}}$ bzw. $f_2 = \hat{\tilde{f}}_2$ berechenbar.

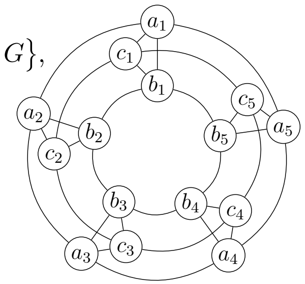
(3) Nicht entscheidbar:

Reduziere das spezielle Halteproblem K auf L_3 mittels folgender Funktion $f\colon w \to w'$. Das Wort w' ist die Kodierung einer DTM, die zunächst ihren Anfangzustand verlässt (und ihn vorerst nicht wieder besucht), und dann unabhängig von ihrer Eingabe, M_w bei Eingabe w simuliert, und genau dann zurück in den Startzustand wechselt, wenn $M_w(w)$ hält.

(4) Entscheidbar:

$$
\begin{aligned}
L_4 &\supseteq \{w\varepsilon \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) = L(M_{w\epsilon})\}\\
&= \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) = L(M_w)\} = \{0,1\}^*
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8 Sei G der nebenstehende Graph. ***21 Punkte***



(a) Bestimmen Sie folgende Parameter und begründen Sie.

(1) $\beta(G) = \min\left\{ \|U\| \;\middle|\; U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\right\}$,

(2) $\chi(G) = \min\left\{k \geq 1 \;\middle|\; G \text{ ist } k\text{-färbbar}\right\}$,

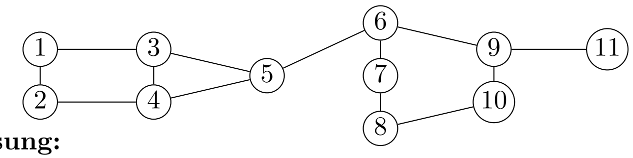
(3) $\mu(G) = \max\left\{ \|M\| \;\middle|\; M \text{ ist ein Matching in } G\right\}$,

(4) $\omega(G) = \max\left\{ \|C\| \;\middle|\; C \text{ ist eine Clique in } G\right\}$,

(5) $\alpha(G) = \max\left\{ \|S\| \;\middle|\; S \text{ ist stabil in } G\right\}$.

(b) Besitzt G eine Eulertour/einen Hamiltonkreis? Geben Sie eine/einen an, oder begründen Sie falls keine/keiner existiert.

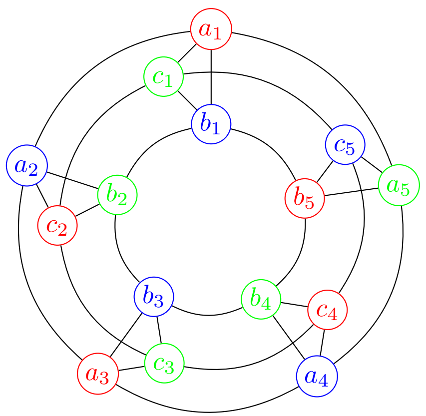
(c) Geben Sie einen Subgraphen von G an, der zu folgendem Graphen isomorph ist.



Lösung:

(a) (1) $\beta(G) = 10$, da $\beta(G) = 15 - \alpha(G)$. Nach der Lösung zu **??** ist $\alpha(G) = 5$.

(2) $\chi(G) = 3$. Der Graph G enthält einen K_3 ($\Rightarrow \chi(G) \geq 3$) und der Graph kann wiefolgt gefärbt werden ($\Rightarrow \chi(G) \leq 3$):



(3) $\mu(G) = 7$. $M = \{\{a_i, b_i\} \mid i \in \{1, \ldots, 5\}\} \cup \{\{c_1, c_2\}, \{c_3, c_4\}\}$ ist ein Matching mit $|M| = 7$ ($\Rightarrow \mu(G) \geq 7$). Da der Graph 15 Knoten enthält, können Matchings maximal $\lfloor 15/2 \rfloor = 7$ Kanten enthalten ($\Rightarrow \mu(G) \leq 7$).

(4) $\omega(G) = 3$. $G[\{a_1, b_1, c_1\}]$ ist ein K_3 ($\Rightarrow \omega(G) \geq 3$). Da $\chi(G) = 3$ kann G keinen K_4 enthalten ($\Rightarrow \omega(G) \leq 3$).

(5) $\alpha(G) = 5$. Denn $S = \{a_1, b_2, a_3, b_4, c_5\}$ ist eine stabile Menge ($\Rightarrow \alpha(G) \geq 5$). In einer stabilen Menge darf höchstens 1 Knoten aus jeder Clique $\{a_i, b_i, c_i\}$ mit $i \in \{1, \ldots, 5\}$ enthalten sein. Wir haben eine *Cliquenüberdeckung* des Graphen gefunden, die aus 5 Cliquen besteht, somit kann jede stabile Menge höchstens 5 Knoten enthalten ($\Rightarrow \alpha(G) \leq 5$).

(b) G besitzt eine Eulertour, da alle Knoten geraden Grad haben. Eine solche ist:

$$a_1, a_2, b_2, c_2, a_2, a_3, b_3, c_3, a_3, a_4, b_4, c_4, a_4, a_5, b_5, c_5, a_5, a_1,$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_1, a_1$$

G besitzt auch einen Hamiltonkreis, da folgendes ein Hamiltonkreis ist:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_4, b_3, b_2, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, b_5, a_5, a_1.$$

(c) z.B.