

Übungsblatt 12

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 5. Februar 2015

Aufgabe 54

mündlich

Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n additiv ist: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$.

Aufgabe 55

Zeigen Sie:

mündlich

- (a) USAT ist in der Klasse $D^P = \{A \setminus B \mid A, B \in \text{NP}\}$ enthalten und hart für $\text{UP} \cup \text{co-NP}$.
- (b) $\#P^A = \#P \Leftrightarrow A \in \text{UP} \cap \text{co-UP}$.
- (c) $\exists^P \cdot \text{L} = \text{NL} \Leftrightarrow \text{PH} = \text{NL}$.
- (d) $\oplus P^{\text{PH}} \subseteq \text{BPP}^{\oplus P} \subseteq \oplus P / \text{poly}$.
- (e) $\text{PP}^{\text{PH}} \subseteq \text{P}^{\text{PP}}$.

Aufgabe 56

mündlich

Eine k -Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne COLGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

- (a) COLGI, DIRGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt $\text{COLGI} \stackrel{\log}{\equiv}_m \text{COLGI} \stackrel{\log}{\equiv}_m \text{GI}$.
- (b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 57

Zeigen Sie:

mündlich

- (a) $\text{GA} \in \oplus P$.
- (b) Das Primzahlproblem liegt in $\oplus P$. (*Hinweis:* Überlegen Sie, auf wie viele Arten sich eine Zahl n in geeignete Faktoren zerlegen lässt.)
- (c) $\text{BPL} \subseteq \text{PL} \subseteq \text{P}$ und $\oplus \text{L} \subseteq \text{P}$. (*Bemerkung:* $\oplus \text{L}$, BPL und PL sind definiert wie $\oplus P$, BPP und PP, nur dass anstelle der polynomiellen Zeitschranke eine logarithmische Platzschranke auferlegt wird.)

Aufgabe 58

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit $\# \notin \Sigma$.

mündlich

Eine Funktion $f: (\Sigma \cup \{\#\})^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *unbeschränkte Und-Funktion* (kurz \wedge -Funktion) für A , falls für alle $x_1, \dots, x_k \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x_1\# \dots \#x_k) \in A \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k : x_i \in A.$$

Im Fall $k = 2$ nennen wir f eine *Und-Funktion* (kurz \wedge_2 -Funktion). Die Begriffe der (*unbeschränkten*) *Oder-Funktion* und der *Nicht-Funktion* (kurz \neg -Funktion) sind analog definiert. f heißt *linear*, falls $|f(w)| = \mathcal{O}(|w|)$ ist. Zeigen Sie:

- (a) SAT, $\oplus \text{SAT}$ und GI haben lineare \wedge_2 - und \vee_2 -Funktionen in FL.
- (b) GA hat eine lineare \vee_2 -Funktion in FL.
- (c) $\oplus \text{SAT}$ hat eine \neg -Funktion in FL.
- (d) Falls A eine lineare \wedge_2 -Funktion (bzw. \vee_2 -Funktion) in FP hat, so hat A auch eine \wedge -Funktion (bzw. \vee -Funktion) in FP.

Aufgabe 59

10 Punkte

Sei C eine unter \leq_m^{\log} -Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein C-vollständiges Problem. Zeigen Sie:

- (a) C ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn A eine \wedge_2 -Funktion in FL hat.
- (b) NP, co-NP und $\text{NP} \cap \text{co-NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
- (c) $\text{NP} \cup \text{co-NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist.