Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 29. Januar 2015

Aufgabe 50 — *mündlich*

Eine ***Offline-Orakelturingmaschine*** (kurz ***Offline-OM***) ist eine Offline-TM mit einem zusätzlichen write-only Orakelband. Der Platzverbrauch einer Offline-OM M ist genauso definiert wie bei einer Offline-TM, wobei das Orakelband unberücksichtigt bleibt. Sei $L = L(M^A)$ die von einer $s(n)$-platzbeschränkten Offline-OM M mit Orakel A erkannte Sprache.

- Wir sagen, M ***stellt ihre Fragen deterministisch*** und schreiben $L = L(M^{d(A)})$, wenn jede Teilrechnung von M beginnend mit der Ausgabe des jeweils ersten Zeichens auf dem Orakelband bis zum Übergang in den Fragezustand deterministisch ist.
- Falls M auch unter Berücksichtigung des Orakelbandes $s(n)$-platzbeschränkt ist, nennen wir M ***streng s(n)-platzbeschränkt*** und schreiben $L = L(M^{s(A)})$.

Entsprechend erhalten wir die relativierten Klassen $\mathsf{DSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{DSPACE}^{d(A)}(s(n))$ und $\mathsf{DSPACE}^{s(A)}(s(n))$, sowie $\mathsf{NSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{NSPACE}^{d(A)}(s(n))$ und $\mathsf{NSPACE}^{s(A)}(s(n))$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{DSPACE}^{s(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}^{d(A)}(s(n)) = \mathsf{DSPACE}^A(s(n))$.
(b) $\mathsf{NSPACE}^{s(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^{d(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^A(s(n))$.
(c) Für jedes Orakel A gilt $\mathsf{L}^A \subseteq \mathsf{NL}^{d(A)} \subseteq \mathsf{P}^A$ und $\mathsf{NL}^A \subseteq \mathsf{NP}^A$.
(d) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{NL}^A \not\subseteq \mathsf{P}^A$.
(e) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{NL}^B \not\subseteq \mathsf{DSPACE}^B(\log^2(n))$.

Aufgabe 51 — *mündlich*

Eine Funktion g heißt *parsimonious reduzierbar* auf eine Funktion h (kurz $g \leq_{par} h^p$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln (mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$) definierte Funktion vollständig für $\#\mathsf{P}$ unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#\textsc{Sat} : F(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|\{a \in \{0,1\}^n \mid F(a) = 1\}\|$$

(b) Folgern Sie, dass $\oplus\textsc{Sat}$ $\oplus\mathsf{P}$-vollständig ist.
(c) Zeigen Sie, dass Teil (a) für jede vollständige Basis von Junktoren (wie z. B. $\{\wedge, \neg\}$, $\{\overline{\wedge}\}$ (NAND), $\{\rightarrow, 0\}$ oder $\{\wedge, \oplus, 1\}$) gilt.

Aufgabe 52 Zeigen Sie: — *mündlich*

(a) $\mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]} \subseteq \mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]}$,
(b) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} \subseteq \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k+1]}$,
(c) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} = \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]}$,
(d) $\mathsf{P}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]}$,
(e) $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{FP}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]} \Rightarrow \mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.
Hinweis: Überlegen Sie, warum eine erfüllende Belegung für eine Formel in U$\textsc{Sat}$ in $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}}$ berechenbar ist, und benutzen Sie den Satz von Valiant und Vazirani.

Aufgabe 53 Zeigen Sie: — *10 Punkte*

(a) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{NP}^A \neq \mathsf{co\text{-}NP}^A$.
(b) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{NL}^B \neq \mathsf{co\text{-}NL}^B$.
(c) Es gibt ein Orakel C mit $C \in \mathsf{L}^{d(C)} \setminus \mathsf{NL}^{s(C)}$.
(d) Es gilt $\mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{d(A)} = \mathsf{NL}^{d(A)} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{s(A)} = \mathsf{NL}^{s(A)}$.