

Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 22. Januar 2015

Aufgabe 49

mündlich

Für einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit Partitions Mengen $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ und $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ der Größe n sei X_G die $(n \times n)$ -Matrix mit Einträgen $a_{ij}x_{ij}$, wobei $a_{ij} = 1$ ist, falls $\{u_i, w_j\} \in E$ gilt, und $a_{ij} = 0$ sonst. Zeigen Sie:

- Die Determinante $\det(X_G)$ von X_G ist ein Polynom $q(x_{11}, \dots, x_{nn})$ über den n^2 Variablen x_{ij} vom Gesamtgrad höchstens n .
- G hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $\det(X_G) \neq 0$ ist.
- Falls $q(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens d ist, so gilt für unabhängig und zufällig gewählte Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}_p$, p prim, $q(a_1, \dots, a_m) \neq_p 0$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - d/p$.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über m und stellen Sie $q(x_1, \dots, x_m)$ im Induktionsschritt in der Form $\sum_{i=0}^d q_i(x_1, \dots, x_{m-1})x_m^i$ dar.

- Geben Sie einen effizienten probabilistischen Algorithmus an, der testet, ob G ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 50 Zeigen Sie:

mündlich

- $\#P \subseteq FP(PP)$ und $\# \cdot C \subseteq FP(\exists^{\geq 1/2} \cdot C)$, falls C unter \leq_m^{log} abgeschlossen ist.
- $\oplus P \subseteq P(PP)$ und $\oplus \cdot C \subseteq P(\exists^{\geq 1/2} \cdot C)$, falls C unter \leq_m^{log} abgeschlossen ist,
- $P(\oplus P) = \oplus P$ und $P(\oplus \cdot C) = \oplus \cdot C$, falls C unter \leq_{disj}^{log} abgeschlossen ist.

- $BPP(BPP) = BPP$ und $BPP(BP \cdot C) = BP \cdot C$, falls C unter \leq_{maj}^{log} abgeschlossen ist.
- $PP(BPP) = PP$ und $PP(BP \cdot C) = P \cdot C$, falls C unter \leq_{maj}^{log} abgeschlossen ist.

Aufgabe 51

mündlich

Eine nichtdeterministische Orakel-Turingmaschine (NOTM) N heißt *strong* unter Orakel B , falls N^B bei jeder Eingabe x entweder mindestens eine akzeptierende oder mindestens eine verwerfende Rechnung ausführt, aber nicht beides. Eine NPOTM ist eine polynomiell zeitbeschränkte NOTM. Zeigen Sie:

$$NP^B \cap \text{co-NP}^B = \{L(N^B) \mid N \text{ ist eine NPOTM, die strong unter } B \text{ ist}\}.$$

Aufgabe 52 Zeigen Sie:

mündlich

- $BPP \subseteq R \cdot \text{co-NP} \cap \text{co}(R \cdot \text{co-NP}) \subseteq RP^{NP} \cap \text{co-RP}^{NP} = ZPP^{NP}$.
- $NP^{BPP} \subseteq ZPP^{NP}$.

Hinweis: Zeigen Sie für jede Sprache $A \in R \cdot \text{co-NP} \cap \text{co}(R \cdot \text{co-NP})$ die Inklusion $NP^A \subseteq ZPP^{NP^{NP \cap \text{co-NP}}}$.

- $NP \subseteq BPP \Rightarrow NP^{BPP} = BPP \Rightarrow PH = BPP$.

Aufgabe 53

10 Punkte

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \text{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \text{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$P/\text{poly} = P(\text{SPARSE}) = P(\text{TALLY}).$$