Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. Januar 2015

Aufgabe 44 ***mündlich***

Überlegen Sie, wie sich durch geeignete Einschränkung von QBF vollständige Probleme für die Stufen der Polynomialzeithierarchie ableiten lassen.

Aufgabe 45 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann auch unter disjunktiven Reduktionen.
(b) Falls C unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$ unter dem R-Operator abgeschlossen.
(c) Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\exists \cdot \forall \cdot \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C} = \exists \cdot \forall \cdot \mathsf{C}$.
(d) Aus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ folgt $\mathsf{PH} = \Sigma_2^p$.

Aufgabe 46 ***mündlich***

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in \mathsf{SCW}$), falls ein Polynom p, eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{p(|x|)} : x\#y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x\#M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

(a) $\textsc{Sat} \in \mathsf{SCW}$.
(b) Jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
(c) Jede Sprache $A \in \mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW}$ hat eine witness-Funktion in PSK, d.h. es existieren ein Polynom p, eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ und eine Folge c_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit n Eingängen und $p(n)$ Ausgängen, so dass für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x\#c_n(bin(x)) \in B$.
(d) Für jede Sprache $A = \exists B \in \mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW}$ ist die Korrektheit eines Schaltkreises c für eine geg. Eingabelänge n in $\mathsf{co\text{-}NP}$ entscheidbar, d.h. $\{0^n\#bin(c) \mid \forall x \in A \cap \Sigma^n : x\#c(bin(x)) \in B\} \in \mathsf{co\text{-}NP}$.
(e) $\mathsf{NP}(\mathsf{NP}(\mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW})) = \mathsf{NP}(\mathsf{NP})$,
(f) $\textsc{Sat}$ ist nicht in PSK enthalten, außer wenn PH auf Σ_2^p kollabiert.

Aufgabe 47 ***mündlich***

Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten ist. Bezeichne $\textsc{Turnier}$ die Menge aller Turniergraphen und bezeichne $\textsc{DirGI}$ das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

(a) $\textsc{DirGI}$ und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt $\textsc{DirGI} \equiv_m^{log}$ GI.
(b) Die Anzahl der Automorphismen eines Turniergraphen ist ungerade.
(c) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen $\textsc{Turnier} \cap \textsc{DirGI}$ liegt in $\oplus\mathsf{P}$.

Aufgabe 48 ***10 Punkte***

Sei C unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen. Zeigen Sie:

(a) $\oplus \cdot \mathsf{C}$ ist unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen.
(b) $\oplus \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\oplus$-Operator abgeschlossen, d.h. $\oplus \cdot \oplus \cdot \mathsf{C} = \oplus \cdot \mathsf{C}$.
(c) $\exists \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\exists$-Operator abgeschlossen, d.h. $\exists \cdot \exists \cdot \mathsf{C} = \exists \cdot \mathsf{C}$.
(d) $\forall \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\forall$-Operator abgeschlossen, d.h. $\forall \cdot \forall \cdot \mathsf{C} = \forall \cdot \mathsf{C}$.