

Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Januar 2014

Aufgabe 40 Zeigen Sie:

mündlich

- MAJSAT ist PP-vollständig und es gilt $PP \subseteq PSPACE$.
- PSPACE ist unter allen Operatoren $O \in \{\exists^p, \forall^p, R, BP, P, \oplus\}$ abgeschlossen.
- PH ist die kleinste Klasse, die P enthält und unter dem \exists^p -Operator und dem \forall^p -Operator abgeschlossen ist.
- $PH \neq PSPACE$, außer wenn PH kollabiert.
- Alle Stufen der Polynomialzeithierarchie sind unter majority-Reduktionen abgeschlossen.
- Nicht jede von einer PM in erwarteter Laufzeit $n^{O(1)}$ akzeptierte Sprache liegt in PP.

Aufgabe 41

mündlich

Zeigen Sie, dass aus $NP \subseteq BPP$ die Gleichheit $NP = RP$ folgt. (*Hinweis:* Benutzen Sie einen BPP-Algorithmus für SAT, um für eine gegebene Formel $F \in SAT$ mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung zu finden.)

Aufgabe 42

mündlich

Sei $\rho \in [0, 1]$ eine reelle Zahl. Eine ρ -PM ist eine PM mit maximalem Verzweigungsgrad 2, die eine ρ -Münze benutzt: Hat eine Konfiguration K zwei Folgekonfigurationen K' und K'' , so gilt $\Pr[K \rightarrow_M K'] = \rho$ und $\Pr[K \rightarrow_M K''] = 1 - \rho$. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PMs durch ρ -PMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ , BPP_ρ , RP_ρ und ZPP_ρ . Zeigen Sie:

- Für $\rho \in \{0, 1\}$ gilt $PP_\rho = BPP_\rho = RP_\rho = ZPP_\rho = P$.
- Für $\rho \in (0, 1)$ kann jede PM M durch eine ρ -PM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\text{time}_M(x))$ simuliert werden.
- Jede ρ -PM M kann durch eine PM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\text{time}_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n -te Bit b_n der Binärrepräsentation $0.b_1b_2\dots$ von ρ ist in Zeit $n^{O(1)}$ berechenbar).
- Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0, 1)$ gilt $BPP = BPP_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).
- Es gibt Zahlen $\rho \in (0, 1)$ mit $PP \neq PP_\rho$ (sogar $PP_\rho \not\subseteq RE$).

Aufgabe 43

10 Punkte

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus.

Algorithmus: RandomWalk

```
1 Input: KNF-Formel  $F(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 1$ , ohne Einerklauseln
2   wähle eine beliebige Belegung  $a$  für  $F$ 
3   while  $F(a) = 0$  do
4     wähle eine beliebige Klausel  $C$  von  $F$  mit  $C(a) = 0$ 
5     wähle zufällig ein Literal  $l$  in  $C$ 
6     flippe den Wert von  $a(l)$ 
7 Output:  $a$ 
```

Sei F eine 2-KNF-Formel (o.B.d.A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung, die F erfüllt. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von $\text{RANDOMWALK}(F)$ polynomiell beschränkt ist.

Hinweis: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die erwartete Anzahl $t(i)$ von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in genau i Variablen von h abweicht:

- $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$,
- $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$ für $i = 1, \dots, n-1$,
- $t(i) \leq i(2n-i)$ für $i = 0, \dots, n$.