Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. November 2014

Aufgabe 23 — *mündlich*

Seien $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $f(n), g(n), t(n) \geq n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ mit $\# \notin \Sigma$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \in \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \Leftrightarrow A_t \in \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))).$$

(b) Zeigen Sie die Implikation

$$\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g(n))) \Rightarrow \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g(t(n)))).$$

(c) Zeigen Sie für $j, k \geq 1$ und $a > 0$ die Implikationen

$$\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n^k)) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n^k \log^a n)) \Rightarrow \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)),$$

$$\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \Rightarrow \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+(j-1)an})) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+jan})),$$

$$\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \Rightarrow \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n})) = \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+(a+1)n})).$$

(d) Schließen Sie hieraus $\mathsf{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n)$ für $k \geq 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 24 — *mündlich*

Geben Sie eine Sprache L an, so dass weder L noch $\bar{L}$ rekursiv aufzählbar sind.

Aufgabe 25 — *mündlich*

Zeigen Sie, dass die $\leq_m^{log}$-Reduzierbarkeit reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 26 — *mündlich*

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$ ist.

Aufgabe 27 — *mündlich*

Zwei Sprachen A und B heißen **äquivalent** ($A \equiv_m^{log} B$), falls $A \leq_m^{log} B$ und $B \leq_m^{log} A$ gilt. Der **Grad** $[A]$ einer Sprache A ist die Klasse aller Sprachen B, die äquivalent zu A sind. Aus wie vielen verschiedenen Graden besteht die Klasse L?

Aufgabe 28 — *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t\rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0,1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

(a) K ist E-vollständig.

(b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.

(c) E ist nicht unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossen.