Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. November 2014

Aufgabe 17 — *mündlich*

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

(1) Jede boolesche Formel über den Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ ist eine Q-Formel.

(2) Ist G eine Q-Formel, so auch $\exists xG$ und $\forall xG$.

Sei F eine Q-Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und sei $a = a_1 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$ eine Belegung. Der Wert von F unter a ist dann

- $F(a)$, falls F quantorenfrei ist,
- $G(a0) \vee G(a1)$, falls $F = \exists y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist, und
- $G(a0) \wedge G(a1)$, falls $F = \forall y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist.

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas), definiert durch

Gegeben: Eine Q-Formel F

Gefragt: Ist F unter allen Belegungen wahr?

in PSPACE entscheidbar ist.

Aufgabe 18 — *mündlich*

Seien Φ und Φ' zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion r gibt, so dass für alle Turingmaschinen M und für fast alle x gilt: $\Phi(M,x) \le r(x, \Phi'(M,x))$.

Aufgabe 19 (Compression Theorem) — *mündlich*

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Sprache L, so dass es für jede $s(n)$-platzbeschränkte DTM M mit $L(M) = L$ eine DTM M' gibt mit $L(M') = L$ und $\mathrm{space}_{M'}(x) \le \log s(|x|)$ für fast alle Eingaben x.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion S durch $S(n) = 2$ für $n \le 0$ und $S(n) = 2^{S(n-1)}$ für $n \ge 1$, und konstruieren Sie bezüglich einer geeigneten Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs eine Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Falls M_i die Sprache L entscheidet, so gilt $s_i(n) \ge S(n-i)$ für fast alle n. Hierbei bezeichnet $s_i(n)$ den maximalen Platzverbrauch von M_i bei Eingaben der Länge n.
2. Für alle $k \ge 1$ gibt es eine DTM M_j mit $s_j(n) \le S(n-k)$, die L entscheidet.

Aufgabe 20 (Union Theorem) — *mündlich*

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\mathsf{DSPACE}(S(n)) = \mathsf{PSPACE}$.

Hinweis: Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs, so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

1. Für alle k gilt $S(n) \ge n^k$ für fast alle n.
2. Falls der Platzbedarf $s_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $s_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gibt es ein n mit $s_i(n) > S(n)$.

Aufgabe 21 — *10 Punkte*

Beweisen Sie den Platzhierarchiesatz: Sind $g(n), f(n) \ge 2$ und ist f eine echte Komplexitätsfunktion mit

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist $\mathsf{DSPACE}(f(n)) \setminus \mathsf{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset$ und $\mathsf{NSPACE}(f(n)) \setminus \mathsf{NSPACE}(g(n)) \neq \emptyset$.