

## Übungsblatt 12

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 20.–24. 01. 2014  
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 29. 1. 2014

### Aufgabe 91

mündlich

(a) Entscheiden Sie die beiden folgenden PCP-Instanzen:

$$\begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

(b) Zeigen Sie, dass  $PCP_{\Sigma}$  über einem unären Alphabet  $\Sigma$  entscheidbar ist.

(c) Reduzieren Sie PCP auf MPCP.

### Aufgabe 92

10 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik  $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$  mit folgenden Regeln:

$$P: A \rightarrow BabC \quad (1) \quad Ba \rightarrow Cba, aBa \quad (2, 3) \quad bC \rightarrow bCb \quad (4) \quad C \rightarrow ab \quad (5)$$

(a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort  $v = aabbababb$  in  $G$  an. (3 Punkte)

(b) Sei  $\Gamma = \{A, B, C, a, b, \langle, |, \rangle\}$  und sei  $f$  die in der Vorlesung definierte Funktion, die  $L(G)$  auf  $MPCP_{\Gamma}$  reduziert. Geben Sie für ein beliebiges Wort  $w \in \{a, b\}^*$  explizit die zugehörige  $MPCP_{\Gamma}$ -Instanz  $f(w)$  an. (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie alle  $MPCP_{\Gamma}$ -Lösungen  $\alpha$  minimaler Länge für  $f(v)$ . Begründen Sie. Geben Sie zu jedem solchen  $\alpha$  auch das entsprechende Lösungswort an. (3 Punkte)

### Aufgabe 93

mündlich

Sei  $PCP^{\leq k}$  die Einschränkung von PCP auf Instanzen mit höchstens  $k$  Wortpaaren. Ist  $PCP^{\leq k}$  für jedes  $k \geq 1$  entscheidbar? Begründen Sie.

### Aufgabe 94

mündlich

(a) Das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen.

(b) Das Äquivalenz-, Schnitt- und Inklusionsproblem für reguläre Sprachen.

### Aufgabe 95

mündlich

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante  $PCP^*$  entscheidbar ist:

**Gegeben:** Eine PCP-Instanz  $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$ .

**Gefragt:** Gibt es Indexfolgen  $i_1, \dots, i_m$  und  $j_1, \dots, j_n$  mit  $m, n \geq 1$  und  $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$ ?

*Hinweis:* Reduzieren Sie  $PCP^*$  auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.

### Aufgabe 96

mündlich

**Gegeben:** Eine kontextfreie Grammatik  $G$ .

**Gefragt:** Enthält  $L(G)$  ein Palindrom?

*Hinweis:* Reduzieren Sie das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf dieses Entscheidungsproblem.

### Aufgabe 97

20 Punkte

Für eine Folge  $s = (x_1, \dots, x_k)$  von Strings  $x_i \in \{a, b\}^*$  sei  $L_s$  die Sprache

$$\{i_n \dots i_1 \# x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

über dem Alphabet  $\{a, b, \#, 1, \dots, k\}$  und für zwei solche Folgen  $s$  und  $t$  sei  $L_{s,t}$  die Sprache  $L_s \cap L_t$ . Zeigen Sie:

(a)  $L_s$  und  $L_t$  sind in DCFL und  $L_{s,t}$  ist in co-CFL. (5 Punkte)

(b) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig. (5 Punkte)

(c) Das Inklusionsproblem für DPDAs ist co-RE-vollständig. (5 Punkte)

(d) Das Problem, für eine gegebene kontextfreie Grammatik  $G$  zu entscheiden, ob  $L(G) = L(G)^R$  ist, ist co-RE-vollständig. (5 Punkte)

*Hinweis:* Zeigen und benutzen Sie die Äquivalenz  $L_{s,t} = L_{s,t}^R \Leftrightarrow L_{s,t} = \emptyset$ .

### Aufgabe 98

20 Zusatzpunkte

(a) Die Quersumme einer PCP-Lösung  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  sei  $s(\alpha) = \sum_{j=1}^n i_j$ . Berechnen Sie die Länge  $n_{\min}$  der kürzesten Lösung  $\alpha_{\min}$  für die Instanz

$$I = \begin{pmatrix} aaba & baab & a \\ a & aa & aab \end{pmatrix}$$

sowie  $s(\alpha_{\min})$ . *Hinweis:*  $n_{\min}$  ist eine 3-stellige Dezimalzahl. (10 Zusatzpunkte)

\* (b) Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante  $PCP^{**}$  entscheidbar ist.

**Gegeben:** Eine PCP-Instanz  $I = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$ .

**Gefragt:** Gibt es Indexfolgen  $i_1, \dots, i_n$  und  $j_1, \dots, j_n$  mit  $n \geq 1$  und  $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$ ?

*Hinweis:* Reduzieren Sie  $PCP^{**}$  auf das Komplement des Leerheitsproblems für kontextfreie Sprachen, d.h. transformieren Sie  $I$  in eine kontextfreie Sprache  $L_I$  mit  $I \in PCP^{**} \Leftrightarrow L_I \neq \emptyset$ . (10 Zusatzpunkte)