

Übungsblatt 9

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 16.–20. 12. 2013
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 8. 1. 2014*

Aufgabe 64

mündlich

Lokalisieren Sie folgende Sprachen möglichst exakt innerhalb der Chomsky-Hierarchie (inklusive DCFL und DCSL). Begründen Sie.

- (a) $L_1 = \{(ab)^n a^m b^n \mid 1 \leq n < m\}$,
- (b) $L_2 = \{xyx^R \mid x, y \in \{a, b\}^+, |x| \leq |y|\}$,
- (c) $L_3 = \{xyx^R \mid x, y \in \{a, b\}^+, |y| \leq |x|\}$.

Aufgabe 65 Zeigen Sie, dass CFL in DCSL enthalten ist.

mündlich

Hinweis: Konstruieren ausgehend von einer CNF-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ für eine kontextfreie Sprache $L \setminus \{\varepsilon\}$ einen DLBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ für L mit dem Arbeitssalphabet $\Gamma = \hat{\Sigma} \cup (\hat{\Sigma} \times \{1, \dots, \|P\|\} \times \{1, \dots, \|P\|\} \times (\hat{V} \cup \hat{\Sigma}))$. M benutzt Bandinschriften der Form $(\hat{x}_1, i_1, i_2, \alpha_1)(x_2, i_3, i_4, \alpha_2) \dots (x_{n-1}, i_{2n-3}, i_{2n-2}, \alpha_{n-1})(\hat{x}_n, i_{2n-1}, i_{2n}, \alpha_n)$, um die Eingabe $x = x_1 \dots x_n$, eine Folge $i_1 \dots i_{2n-1}$ von Regelindizes $i_j \in \{1, \dots, \|P\|\}$ und eine Satzform $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ mit $1 \leq k \leq n$ zu speichern.

Bemerkung: Nach Aufgabe 71 ist die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \text{DCSL}$. Da L nicht kontextfrei ist, ist CFL also echt in DCSL enthalten. Ob auch die Inklusion $\text{DCSL} \subseteq \text{CSL}$ echt ist, ist bis heute ungelöst. Diese Frage ist als *LBA-Problem* bekannt.

Aufgabe 66 Zeigen Sie:

mündlich

- (a) DCSL und CSL sind unter Vereinigung, Schnitt, Produkt und Sternhülle abgeschlossen.
- (b) $\text{DCSL} = \text{co-DCSL}$. (*Bemerkung:* Es gilt auch $\text{CSL} = \text{co-CSL}$.)

Aufgabe 67

mündlich

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ eine 1-DTM, wobei δ gegeben ist durch

$$\begin{array}{lll} z_0 a \rightarrow z_1 b N, & z_0 b \rightarrow z_1 a N, & z_0 \sqcup \rightarrow z_2 \sqcup N, \\ z_1 a \rightarrow z_0 a R, & z_1 b \rightarrow z_0 b R, & z_1 \sqcup \rightarrow z_0 \sqcup R. \end{array}$$

- (a) Geben Sie die Rechnung (Konfigurationsfolge) von $M(aabba)$ an.
- (b) Beschreiben Sie informell das Verhalten von M , wenn M im Zustand z_0 mit einer beliebigen Bandinschrift gestartet wird.

Aufgabe 68

mündlich, optional

Ein k -PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ist ein PDA mit Endzuständen, der über k Kellerspeicher verfügt. Falls Γ neben dem Kellerspeicherzeichen $\#$ nur noch ein weiteres Zeichen A enthält und M die k Stacks oberhalb des untersten Zeichens $\#$ nur mit diesem Zeichen befüllen kann, heißt M k -CPDA (für engl. k -Counter-PDA).

- (a) Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Überföhrungsfunktion eines k -PDA an.
- (b) Wie lässt sich eine 1-NTM durch einen 2-PDA simulieren?
- * (c) Wie lässt sich ein PDA durch einen 2-CPDA simulieren?
- * (d) Wie lassen sich ein 2-PDA und eine 1-NTM durch einen 2-CPDA simulieren?

Aufgabe 69

5 Punkte

Eine kontextfreie Sprache L heißt (*inhärent*) *mehrdeutig*, falls jede kontextfreie Grammatik für L mehrdeutig ist. Andernfalls heißt L *eindeutig*. Zeigen Sie:

- (a) Die Sprache $L = (L_3 \cup 0L_4)^R$ mit $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$ und $L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$ (siehe Aufgabe 62) ist eindeutig (es gibt also eindeutige Sprachen in $\text{CFL} \setminus \text{DCFL}$).
(mündlich)
- (b) Jede deterministisch kontextfreie Sprache $L \in \text{DCFL}$ ist eindeutig. *(5 Punkte)*

Hinweis: Konstruieren Sie aus einem deterministischen PDA M , der die präfixfreie Sprache $L\$$ durch Leeren des Kellers akzeptiert (siehe Aufgabe 61), eine eindeutige kontextfreie Grammatik für $L\$$ und daraus eine für L .

Bemerkung: Die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k\}$ ist inhärent mehrdeutig (die eindeutigen kontextfreien Sprachen liegen also echt zwischen DCFL und CFL).

Aufgabe 70

10 Punkte

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ ein PDA mit $Z = \{q, q', p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta: \quad qa\# \rightarrow qA\#, \quad qaA \rightarrow qAA, \quad qbA \rightarrow q', \quad q'bA \rightarrow q', \quad q'\epsilon\# \rightarrow p.$$

- (a) Ist $M' = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#, \{p\})$ ein DPDA? Begründen Sie. *(2 Punkte)*
- (b) Geben Sie explizite Beschreibungen für $L(M)$ und $L(M')$ an. *(2 Punkte)*
- (c) Transformieren Sie M' mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen DPDA für das Komplement von $L(M')$. *(6 Punkte)*

Aufgabe 71

7 Punkte

Geben Sie einen DLBA für die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ an und erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Aufgabe 72

8 Punkte

Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ an und erläutern Sie Ihre Konstruktion. (*Bemerkung:* L ist in $\text{DCSL} \setminus \text{CFL}$.)