Übungsblatt 8

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 9.–13. 12. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 18. 12. 2013

Aufgabe 54 Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}$. ***mündlich***

(a) Geben Sie einen PDA M für L an und beweisen Sie dessen Korrektheit.

(b) Konstruieren Sie aus M eine kontextfreie Grammatik. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 55 ***10 Punkte***

Gegeben sei der Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{p, q\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{A, B, \#\}$ und der Überführungsfunktion

$$\begin{array}{llllllll} \delta: q\epsilon\# \to q & (1) & qa\# \to qA\# & (2) & qaA \to qAA & (3) & qbA \to pA & (4) \\ p\epsilon\# \to q & (5) & pbA \to p & (6) & pb\# \to pB\# & (7) & pbB \to pBB & (8) \\ pcB \to q & (9) & qcB \to q. & (10) & & & & \end{array}$$

(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(M)$ an. *(2 Punkte)*

(b) Konstruieren Sie zu M eine äquivalente kontextfreie Grammatik G. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung. *(5 Punkte)*

(c) Geben Sie eine akzeptierende Rechnung von $M(abbbbcc)$ und die zugehörige Ableitung in der Grammatik G an. *(3 Punkte)*

Aufgabe 56 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die Überführungsrelation $\vdash_M$ eines PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ genau dann rechtseindeutig ist, wenn δ für alle $q \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ die Bedingung $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$ erfüllt.

Aufgabe 57 ***mündlich***

(a) Geben Sie einen PDA für das Komplement von $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ an (d. h. $\overline{L} \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{DCFL}$). *(optional)*

(b) Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und $\overline{L}$ an, d. h. $L \in \mathsf{CFL} \cap \mathsf{co\text{-}CFL}$. (*Bemerkung:* L ist aber nicht in DCFL.)

Aufgabe 58 ***5 Punkte***

(a) Sei A eine (deterministisch) kontextfreie und B sei eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann $A \cap B$ (deterministisch) kontextfrei ist. Müssen dann auch die Sprachen $A \setminus B$ und $A \Delta B$ (deterministisch) kontextfrei sein? *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen nicht unter dem *perm*- Operator (siehe Aufgabe 33) abgeschlossen ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe 59 ***5 Punkte***

(a) Zeigen Sie, dass deterministische Kellerautomaten durch Leeren des Kellers genau die präfixfreien Sprachen in DCFL akzeptieren. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass Kellerautomaten mit Endzuständen genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren (also gilt $\mathsf{DCFL} \subseteq \mathsf{CFL}$). *(5 Punkte)*

Aufgabe 60 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in DCFL. Zeigen Sie: ***mündlich***

*(a) L wird von einem DPDA erkannt, der für alle Eingaben $x \in L \setminus \{\varepsilon\}$ unmittelbar nach Lesen des letzten Zeichens von x einen Endzustand annimmt. *(optional)*

(b) Für jedes $a \in \Sigma$ ist auch die Sprache $L_{-a} = \{x \in (\Sigma \setminus \{a\})^* \mid x \in L \text{ oder } xa \in L\}$ in DCFL. (*Hinweis:* Benutzen Sie Teilaufgabe a.)

Aufgabe 61 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und sei $\$ \notin \Sigma$. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $L\$$ ist präfixfrei.

(b) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\$$ in DCFL ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 60.b.)

(c) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\$$ von einem deterministischen PDA durch Leeren des Kellers akzeptiert wird.

Aufgabe 62 ***mündlich, optional***

(a) Geben Sie DPDAs für die Sprachen $L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ an. (*Bemerkung:* Da $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{CFL}$ ist, ist der Abschluss von DCFL unter Schnitt nicht in CFL enthalten.)

(b) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter Spiegelung abgeschlossen ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $L = L_3 \cup 0L_4$ mit $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$ und $L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$ und verwenden Sie Aufgabe 60.b für den Nachweis, dass $L^R \notin \mathsf{DCFL}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter (symmetrischer) Differenz abgeschlossen ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Vorgehensweise von Teilaufgabe b, um zu zeigen, dass DCFL nicht unter disjunkter Vereinigung abgeschlossen ist.

Aufgabe 63 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) Die Klasse DCFL ist unter dem min-Operator abgeschlossen. *(mündlich)*

(b) CFL ist nicht unter dem min-Operator abgeschlossen. *(5 Punkte)*
Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i \leq k \text{ oder } j \leq k\}$.

(c) DCFL ist nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen. *(5 Punkte)*
Hinweis: Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung geführten Beweis, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da zwar $\{\varepsilon, 0\}$ und $L = L_3 \cup 0L_4$ (siehe Aufgabe 62) in DCFL sind, nicht aber $\{\varepsilon, 0\}L$, und zeigen Sie, dass zwar $L \cup \{0\}$ in DCFL ist, nicht aber $(L \cup \{0\})^*$.