

Übungsblatt 7

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 2.–6. 12. 2013
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 11. 12. 2013*

Aufgabe 48 Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}.$$

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
- Wandeln Sie G mit dem Verfahren aus der Vorlesung in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ um.
- Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *abbab* von Ihrer Grammatik G' erzeugt wird.

Aufgabe 49

10 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, L, R\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und den Regeln $P: S \rightarrow LR, SS, a; L \rightarrow a; R \rightarrow SR, b$.

- Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(G)$ an. (3 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Produktionsmenge $P' = P \setminus \{S \rightarrow a\}$.
- Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um die Zugehörigkeit von $aaaabb = a^4b^2$ zu $L(G)$ zu testen. (7 Punkte)

Aufgabe 50

Ein EPDA (extended PDA) ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$. Dabei haben Z , Σ , Γ und q_0 die gleiche Funktion wie bei einem PDA und $E \subseteq Z$ ist eine Menge von Endzuständen. Die Überföhrungsfunktion hat die Form

$$\delta: Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*),$$

wobei $\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Analog zum PDA überföhrt eine Anweisung $qu\alpha \rightarrow p\gamma$ die Konfiguration $(q, uv, \alpha\beta)$ in die Folgekonfiguration $(p, v, \gamma\beta)$

(in Zeichen: $(q, uv, \alpha\beta) \vdash (p, v, \gamma\beta)$). Das Kelleranfangszeichen entfällt. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in E : (q_0, x, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

- Zeigen Sie, dass $\{L(M) \mid M \text{ ist ein EPDA}\} = \text{CFL}$ ist.
- Zeigen Sie, dass ohne die Bedingung „ $\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem EPDA erkannt wird.
- Welche Sprachen können von PDAs erkannt werden, die Überföhrungsfunktionen der Form $\delta: Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma^*)$ haben?

Aufgabe 51

10 Punkte

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Begründen Sie.

- $L_1 = \{a^l b^m a^n \mid m \leq \max(l, n)\}$, (mündlich)
- $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w) < \#_c(w)\}$, (mündlich)
- $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$, (5 Punkte)
- $L_4 = \{baba^2ba^3b \dots ba^{n-1}ba^n b \mid n \geq 1\}$. (5 Punkte)

Aufgabe 52

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Regeln

$$P: S \rightarrow aB, bA, A \rightarrow a, aS, bAA, B \rightarrow b, bS, aBB.$$

- Geben Sie alle Satzformen α von G der Länge $|\alpha| \leq 4$ an.
- Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(G)$ an.
- Konstruieren Sie aus G einen PDA M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
- Zeigen Sie $aabbab \in L(G)$, indem Sie eine Links- und eine Rechtsableitung sowie einen Ableitungsbaum und eine akzeptierende Rechnung von M angeben.
- Ist G mehrdeutig?

Aufgabe 53 Für zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ sei

10 Punkte

$$\text{embed}(A, B) = \{xwy \in \Sigma^* \mid w \in A \wedge xy \in B\}.$$

Zeigen Sie:

- Wenn B kontextfrei ist, so ist auch $\text{embed}(\{\#\}, B)$ kontextfrei. (3 Punkte)
- Wenn A und B kontextfrei sind, so ist auch $\text{embed}(A, B)$ kontextfrei.

Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe (a).

(7 Punkte)