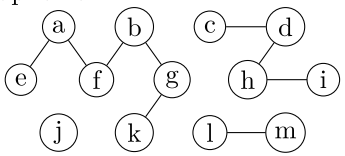
Übungsblatt 4

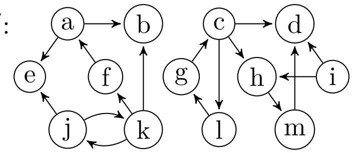
Besprechung der mündlichen Aufgaben am 11.–15. 11. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 20. 11. 2013

Aufgabe 24 ***mündlich***

Ein (gerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt *(stark) zusammenhängend*, wenn jeder Knoten y von jedem Knoten x aus über einen Weg in G erreichbar ist. Die bzgl. Teilgraphenordnung maximalen (stark) zusammenhängenden Teilgraphen von G bezeichnen wir als die *(starken) Zusammenhangskomponenten* von G. Dabei heißt $G' = (V', E')$ *Teilgraph* von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt.

(a) Geben Sie die (starken) Zusammenhangskomponenten von folgenden (gerichteten) Graphen an:

G: 

G': 

(b) Betrachten Sie die Relationen Z und S, wobei xZy (xSy) genau dann gilt, wenn x und y in derselben (starken) Zusammenhangskomponente liegen. Wie lassen sich Z und S durch die Kantenrelation E ausdrücken? Begründen Sie.

(c) Lösen Sie (a) und (b) für den *schwachen Zusammenhang* in G'. Hierbei sollen zwei Knoten x und y genau dann in derselben schwachen Zusammenhangskomponente eines Digraphen liegen (in Zeichen: xWy), wenn y von x aus oder x von y aus über einen Weg erreichbar ist. *(mündlich, optional)*

Aufgabe 25 ***mündlich, optional***

Ein Graph G heißt *selbstkomplementär*, wenn er zu seinem *Komplementärgraphen* $\overline{G}$ isomorph ist. ($\overline{G}$ hat dieselbe Knotenmenge wie G und es werden genau die Knoten $x \neq y$ durch eine Kante verbunden, die in G nicht verbunden sind.)

(a) Zeigen Sie, dass ein selbstkomplementärer Graph zusammenhängend ist.

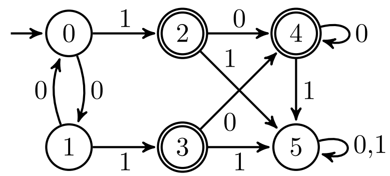
(b) Wieviele nichtisomorphe selbstkomplementäre Graphen mit ≤ 7 Knoten gibt es?

(c) Finden Sie mindestens einen solchen Graphen mit 8 Knoten.

Aufgabe 26 ***6 Punkte***

Seien E_1 und E_2 Äquivalenzrelationen auf einer Menge A. Sind dann auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben jeweils erhalten, welche nicht? Begründen Sie.

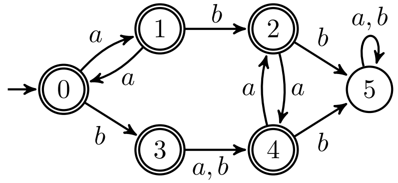
Aufgabe 27 Gegeben sei nebenstehender DFA M. ***mündlich***



(a) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie den Index der Äquivalenzrelation $R_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $R_{L(M)}$ an.

Aufgabe 28 Gegeben sei nebenstehender DFA M. ***10 Punkte***



(a) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie den Index der Äquivalenzrelation $R_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $R_{L(M)}$ an.

Aufgabe 29 Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $k \geq 1$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie einen Minimal-DFA für die Sprache

$$L_k = \{x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid n \geq k, x_k = 1\}.$$

(b) Geben Sie einen NFA für die gespiegelte Sprache $L' = L_k^R$ mit höchstens $k+1$ Zuständen an.

(c) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA für L'.

*(d) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen NFA N mit k Zuständen an, so dass jeder DFA für $L(N)$ mindestens 2^k Zustände hat. *(optional)*

Aufgabe 30 Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei ***8 Punkte***

$$D_i = \begin{cases} \Big\{\{p,q\} \;\Big|\; q \in E, p \notin E\Big\}, & i = 0 \\ D_{i-1} \cup \Big\{\{p,q\} \;\Big|\; \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D_{i-1}\Big\}, & i > 0 \end{cases}$$

die in der Vorlesung zur Minimierung von M benutzte Folge.

(a) Zeigen Sie, dass $D_i = \Big\{\{p,q\} \;\Big|\; \exists x \in \Sigma^{\leq i} : x \in L_q \Delta L_p\Big\}$ ist. Dabei enthält $\Sigma^{\leq n}$ alle Wörter in Σ^* der Länge höchstens n. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass $D_j = D_{j+1}$ die Gleichheit $D_j = \{\{p,q\} \subseteq Z \mid q \not\sim p\}$ impliziert. *(4 Punkte)*

(c) Schätzen Sie die Anzahl $k = \min\{j \geq 0 \mid D_j = D_{j+1}\}$ der benötigten Iterationen in Abhängigkeit von der Anzahl $m = \|Z\|$ der Zustände von M möglichst gut nach oben ab. *(4 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass $E_i = \{(p,q) \in Z^2 \mid \{p,q\} \notin D_i\}$ für jedes $i \geq 0$ eine Äquivalenzrelation auf Z ist.

Aufgabe 31 Sei $\Sigma = \{a, b\}$. ***6 Punkte***

Geben Sie einen Minimal-DFA M für die Sprache der Wörter über Σ an, die *bbb* nicht als Teilwort enthalten. Beweisen Sie die Korrektheit und die Minimalität von M.