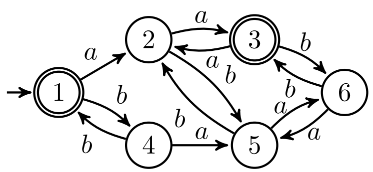
Humboldt-Universität zu Berlin — Einführung in die Theoretische Informatik
Prof. Dr. Johannes Köbler — 28. Oktober 2013

Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 4.–8. 11. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 13. 11. 2013

Aufgabe 15 — ***5 Punkte***

Gegeben sei nebenstehender DFA. Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.



(a) $L^0_{1,2}$, $L^6_{2,1}$, $L^4_{2,5}$, *(mündlich)*
(b) $L^5_{2,3}$ und $L^5_{1,3}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 16 — ***mündlich***

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne R_1 die Relation »ist verheiratet mit«, R_2 die Relation »ist Mutter von« und R_3 die Relation »ist Kind von«.

(a) $R_1 \circ R_2$, (b) $R_2 \circ R_1$, (c) $R_2 \circ R_3$, (d) $R_3 \circ R_2$, (e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 17 — ***mündlich***

Betrachten Sie folgende Relation R auf der Menge $V = \{1, \dots, 9\}$.

$$R = \{(2,4), (3,3), (3,6), (4,1), (4,2), (5,7), (5,8), (5,9), (7,8), (9,8)\}$$

(a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation?
(b) Veranschaulichen Sie die Relationen R, R^T,$h_{\text{sym}}(R)$, $h_{\text{äq}}(R)$, R^2, R^3, R^+,$R^* \cap (R^*)^T$ und $R^* \cup (R^*)^T$ jeweils durch einen Digraphen.

Aufgabe 18 — ***mündlich***

Betrachten Sie die Relation $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c)\}$ auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$. Wieviele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf A zu erhalten? Geben Sie diese Paare jeweils an.

Aufgabe 19 Sei R eine Relation auf A. Beweisen Sie: — ***mündlich***

(a) $R^2 \subseteq R \Leftrightarrow R$ transitiv $\Leftrightarrow R^i \subseteq R$ für alle $i \geq 1$.
(b) $h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$, $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$.
(c) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^+$ ist symmetrisch.

Aufgabe 20 Beweisen Sie: — ***10 Punkte***

(a) Jede reflexive Relation R mit $R \circ R^T \subseteq R$ ist symmetrisch. *(2 Punkte)*
(b) $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$. *(2 Punkte)*
(c) $R^* = R^+ \cup R^0$, $R^+ = R \circ R^*$. *(3 Punkte)*
(d) $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 21 — ***5 Punkte***

Auf der Menge $A = \mathbb{N}^+$ der positiven natürlichen Zahlen seien folgende Relationen definiert:

(a) $xRy :\Leftrightarrow x + y$ ist gerade, *(mündlich)*
(b) $xSy :\Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, *(mündlich)*
(c) $xTy :\Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, *(2 Punkte)*
(d) $xUy :\Leftrightarrow xy$ ist eine Quadratzahl. *(3 Punkte)*

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.

Aufgabe 22 — ***mündlich***

Sei $\Sigma = \{a,b\}$. Ein Wort $x \in \Sigma^*$ heißt *Teilwort* von y, falls $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $y = uxv$. Auf der Menge Σ^* sei folgende Relation definiert:

$$x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow x \text{ ist ein Teilwort von } y.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnung auf Σ^* ist.
(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Einschränkung $\sqsubseteq_A$ von $\sqsubseteq$ auf die Menge $A = \{a, b, aa, ab, ba, aab, abb, bba, aabba\}$.
(c) Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente von A in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$.
(d) Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie Supremum und Infimum von $H := \{abb, bba\}$ in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$ (sofern vorhanden).
(e) Erweitern bzw. verkleinern Sie A um möglichst wenige Wörter aus Σ^* zu A', so dass H ein Supremum und ein Infimum in der Ordnung $(A', \sqsubseteq_{A'})$ besitzt.

Aufgabe 23 Betrachten Sie die Relation — ***10 Punkte***

$$R = \{(0,1), (0,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}^*$$

auf der Menge $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

(a) Begründen Sie, dass R eine Ordnung auf A ist und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm. *(3 Punkte)*
(b) Geben Sie alle maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von A bzgl. R an. *(3 Punkte)*
(c) Welche Teilmengen von A besitzen zwar untere Schranken, aber kein Infimum? Begründen Sie. *(4 Punkte)*