

Übungsblatt 2

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 28.10.–1.11.2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 Uhr am 6.11.2013

Aufgabe 8

Seien A, B, C Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$, (b) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$, (mündlich)
(c) $A^+ = AA^+$, (d) $A(B \cap C) = AB \cap AC$. (2+3 Punkte)

Aufgabe 9 Für eine Sprache L seien

5 Punkte

$$\min(L) = \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\}$$

und

$$\max(L) = \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}.$$

L heißt *präfixfrei*, falls kein Wort in L echtes Präfix eines anderen Wortes in L ist.

- (a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des \min -Operators. (mündlich)
(b) Zeigen Sie, dass $L = \max(L)$ die Gleichheit $L = \min(L)$ impliziert. (mündlich)
(c) Gilt hiervon auch die Umkehrung? Begründen Sie. (2 Punkte)
(d) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem \min -Operator abgeschlossen ist, d. h. für $L \in \text{REG}$ folgt $\min(L) \in \text{REG}$. (mündlich)
(e) Zeigen Sie, dass REG unter dem \max -Operator abgeschlossen ist. (3 Punkte)

Aufgabe 10

Betrachten Sie die Sprachen

5 Punkte

$$A = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } B = \{v \in \{a, b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

- (a) Geben Sie für die Sprachen A und B DFAs M und M' mit jeweils 2 Zuständen an. (mündlich)
(b) Konstruieren Sie aus M und M' mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA N für das Produkt $L = AB$. (mündlich)
(c) Konstruieren Sie aus N einen NFA N' für die Sternhülle L^* von L mit dem Verfahren aus der Vorlesung. (5 Punkte)

Aufgabe 11

mündlich

Ein ENFA (extended NFA) ist ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat und $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^*$ beschriftet sind. Ist eine Kante mit ε beschriftet, so spricht man von einem »spontanen« Übergang, da N den Zustand wechselt, ohne ein Eingabezeichen zu lesen.

- (a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.
(b) Zeigen Sie, dass bei Verzicht auf die Bedingung „ $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.
(c) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \text{REG}$ ist. (optional)

Aufgabe 12

mündlich

Sei $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die aba als Teilwort enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA N für L_1 an und zeigen Sie, dass $L(N) = L_1$ ist.
(b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten.
(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und für $\overline{L_1}$ an.

Aufgabe 13

10 Punkte

Sei $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die das Teilwort abb enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA N für L_2 an und zeigen Sie $L(N) = L_2$. (3 Punkte)
(b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten. (3 Punkte)
(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_2 und für $\overline{L_2}$ an. (4 Punkte)

Aufgabe 14

5+10 Punkte

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie aus einem DFA für L einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren. Begründen Sie jeweils auch die Korrektheit des von Ihnen konstruierten Automaten.

- (a) $\text{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$, (mündlich)
(b) $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$, (mündlich)
(x^R bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B. $abcd^R = dcba$)
(c) $\text{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : yx \in L\}$, (2 Punkte)
(d) L^+ , (3 Punkte)
(e) $\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^ \mid uv \in L\}$, (4 Zusatzpunkte)
(f) $L/2 = \{x \in \Sigma^ \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$. (6 Zusatzpunkte)

Hinweis: Mit * markierte Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad. Falls Sie schriftlich zu lösen sind, werden dafür Bonuspunkte vergeben.