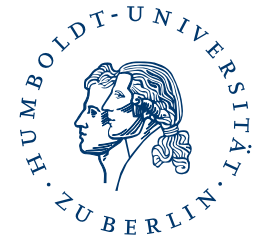
Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2012/13

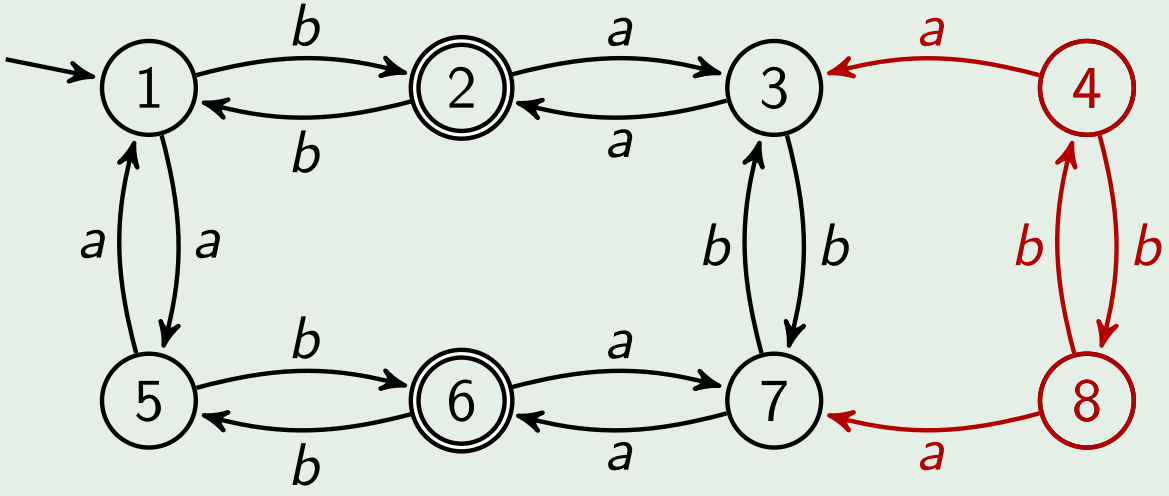
Minimierung von DFAs

Frage

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine minimale Anzahl von Zuständen besitzt (und Z evtl. verkleinern)?

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Zunächst können alle vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände entfernt werden.

◁

Minimierung von DFAs

Frage

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine minimale Anzahl von Zuständen besitzt (und Z evtl. verkleinern)?

Antwort

- Zunächst können alle vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände entfernt werden.
- Zudem lassen sich zwei Zustände p und q verschmelzen, wenn M von p und q aus jeweils dieselben Wörter akzeptiert.
- Für $z \in Z$ sei

  $$M_z = (Z, \Sigma, \delta, z, E) \text{ und } L_z = L(M_z).$$

- Dann können wir p und q verschmelzen (in Zeichen: $p \sim q$), wenn $L_p = L_q$ ist.
- Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Z.

Minimierung von DFAs

Idee

Verschmelze jeden Zustand z mit allen äquivalenten Zuständen $z' \sim z$ zu einem neuen Zustand.

Notation

- Für die durch z repräsentierte Äquivalenzklasse

  $$[z]_\sim = \{z' \in Z \mid z' \sim z\} = \{z' \in Z \mid L_{z'} = L_z\}$$

  schreiben wir auch einfach $[z]$ oder $\tilde{z}$.
- Für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ bezeichne

  $$\tilde{Q} = \{\tilde{q} \mid q \in Q\}$$

  die Menge aller Äquivalenzklassen $\tilde{q}$, die mind. ein $q \in Q$ enthalten.
- Dann führt obige Idee auf folgenden DFA:

  $$M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E}) \quad \text{mit} \quad \delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}.$$

Wie können wir M' aus M konstruieren?

Hierzu genügt es, herauszufinden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht?

- Sei $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B.
- Die Inäquivalenz $p \not\sim q$ ist also gleichbedeutend mit $L_p \Delta L_q \neq \emptyset$.
- Wir nennen ein Wort $x \in L_p \Delta L_q$ Unterscheider zwischen p und q.
- Offenbar unterscheidet ε Zustände $p \in E$ von Zuständen $q \in Z \setminus E$.
- Falls x die Zustände $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidet, so unterscheidet ax die Zustände p und q, d.h. $x \in L_{\delta(p,a)} \Delta L_{\delta(q,a)} \Rightarrow ax \in L_p \Delta L_q$.

Minimierung von DFAs

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Dann ist

$$M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E}) \quad \text{mit} \quad \delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis

- Zuerst müssen wir zeigen, dass δ' wohldefiniert ist, also $\delta'(\tilde{q}, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten q für die Äquivalenzklasse $\tilde{q}$ abhängt.
- Hierzu zeigen wir die Implikation $p \sim q \Rightarrow \delta(p, a) \sim \delta(q, a)$:

$$\begin{aligned} L_q = L_p &\Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L_q \leftrightarrow x \in L_p \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : ax \in L_q \leftrightarrow ax \in L_p \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L_{\delta(q,a)} \leftrightarrow x \in L_{\delta(p,a)} \\ &\Leftrightarrow L_{\delta(q,a)} = L_{\delta(p,a)}. \end{aligned}$$

Minimierung von DFAs

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Dann ist

$$M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E}) \quad \text{mit} \quad \delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis (Fortsetzung)

- Als nächstes zeigen wir, dass $L(M') = L(M)$ ist.
- Sei $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ und seien $q_0, q_1, \dots, q_n$ die von M bei Eingabe x durchlaufenen Zustände, d.h. es gilt $\delta(q_{i-1}, x_i) = q_i$ für $i = 1, \dots, n$.
- Nach Definition von δ' folgt daher $\delta'(\tilde{q}_{i-1}, x_i) = \tilde{q}_i$ für $i = 1, \dots, n$, d.h. M' durchläuft bei Eingabe x die Zustände $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$.
- Da aber $\tilde{q}_n$ entweder nur End- oder nur Nicht-Endzustände enthält, gehört q_n genau dann zu E, wenn $\tilde{q}_n \in \tilde{E}$, d.h. es gilt

$$x \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M').$$

Minimierung von DFAs

Beweis (Schluss)

- Noch z.z.: M' hat eine minimale Anzahl von Zuständen.
- Da M' nicht mehr Zustände hat als M, ist M' sicher dann minimal, wenn M bereits minimal ist.
- Es reicht also zu zeigen, dass die Anzahl $k = \|\tilde{Z}\| = \|\{L_q \mid q \in Z\}\|$ der Zustände von M' nicht von M, sondern nur von $L = L(M)$ abhängt.
- Sei $L_x = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}$. Dann gilt $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} = \{L_q \mid q \in Z\}$:
  - $\subseteq$: Klar, da $L_x = L_q$ für $q = \hat{\delta}(q_0, x)$ ist.
  - $\supseteq$: Auch klar, da jedes $q \in Z$ über ein $x \in \Sigma^*$ erreichbar ist.
- Also hängt $k = \|\{L_q \mid q \in Z\}\| = \|\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}\|$ nur von L ab. □

Bemerkung

Der Beweis zeigt, dass folgende Äquivalenzrelation R_L endlichen Index hat:

$$x \, R_L \, y \;:\Leftrightarrow\; L_x = L_y.$$

Wie können wir M' aus M berechnen?

Hierzu genügt es, zu entscheiden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht?

- Offenbar unterscheidet ε Zustände $p \in E$ von Zuständen $q \in Z \setminus E$.
- Falls x die Zustände $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidet, so unterscheidet ax die Zustände p und q, d.h. $x \in L_{\delta(p,a)} \Delta L_{\delta(q,a)} \Rightarrow ax \in L_p \Delta L_q$.
- Wenn also D nur inäquivalente Zustandspaare enthält, so trifft dies auch auf die Menge

$$D' = \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D\}$$

zu.

Algorithmische Konstruktion von M'

Idee

- Berechne ausgehend von $D_0 = \{\{p, q\} \mid p \in E, q \notin E\}$ mittels

  $$D_{i+1} = D_i \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D_i\}$$

  eine Folge $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ von Mengen mit inäquivalenten Zustandspaaren.
- Da es nur endlich viele Zustandspaare gibt, muss es ein j geben mit $D_{j+1} = D_j$.
- Für die Menge $D = D_j$ gilt dann

  $$p \not\sim q \Leftrightarrow \{p, q\} \in D \quad \text{(siehe Übungen)}.$$

- Folglich ist

  $$\tilde{z} = \{z\} \cup \{z' \in Z \mid \{z, z'\} \notin D\}.$$

Algorithmus zur Berechnung eines minimalen DFA

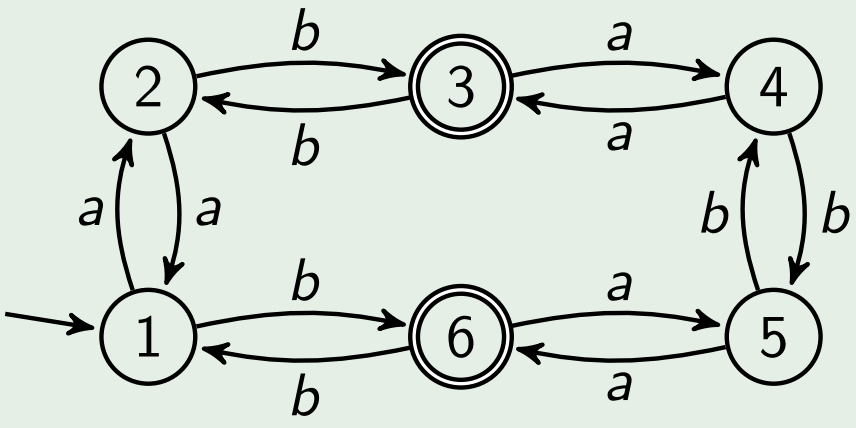
Algorithmus `min-DFA`(M)

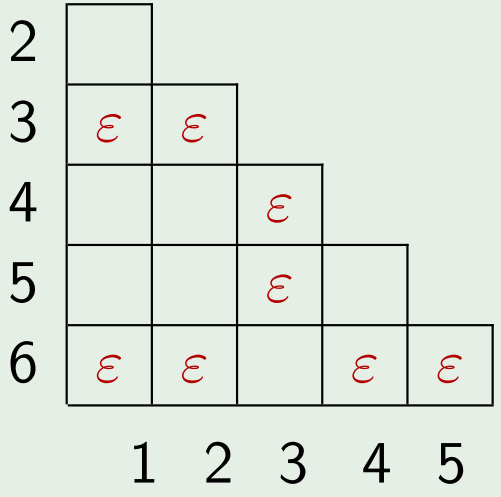
Input: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$
  entferne alle nicht erreichbaren Zustände
  $D' := \{\{z, z'\} \mid z \in E, z' \notin E\}$
  repeat
    $D := D'$
    $D' := D \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D\}$
  until $D' = D$
Output: $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$, wobei für jeden Zustand $z \in Z$ gilt: $\tilde{z} = \{z\} \cup \{z' \in Z \mid \{z, z'\} \notin D\}$

Algorithmus für die Konstruktion von M'

Beispiel

Betrachte den DFA M





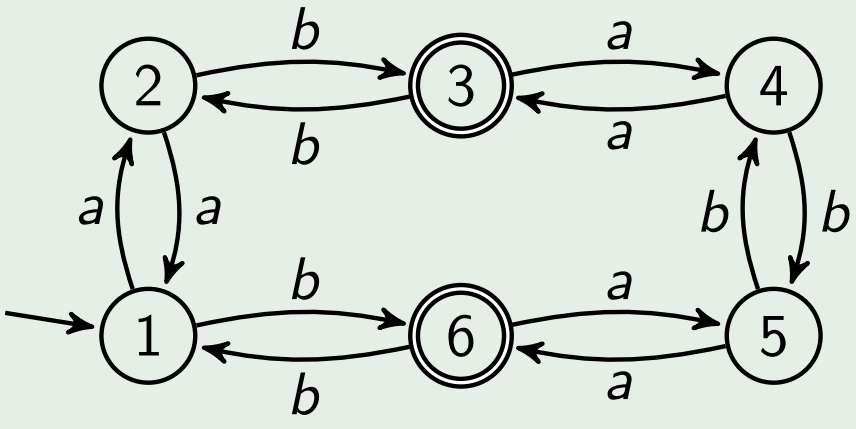
Dann enthält D_0 die Paare

$$\{1,3\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,6\},\{5,6\}.$$

Algorithmus für die Konstruktion von M'

Beispiel

Betrachte den DFA M



2				
3	ε	ε		
4	a	a	ε	
5	a	a	ε	
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Wegen

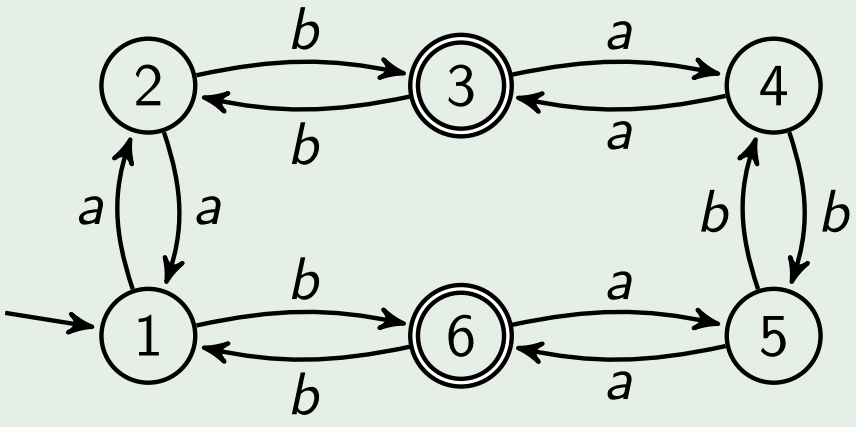
$\{p,q\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$
$\{\delta(q,a),\delta(p,a)\}$	$\{2,3\}$	$\{2,6\}$	$\{1,3\}$	$\{1,6\}$

enthält D_1 zusätzlich die Paare $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$.

Algorithmus für die Konstruktion von M'

Beispiel

Betrachte den DFA M



2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Da nun jedoch die verbliebenen Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ wegen

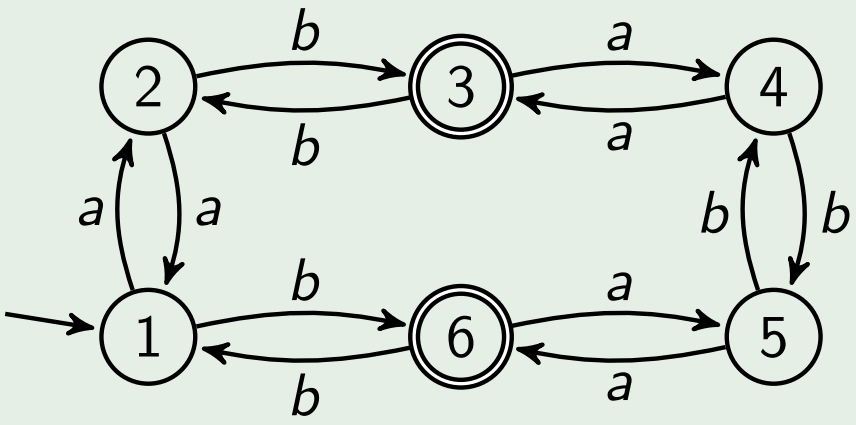
$\{p,q\}$	$\{1,2\}$	$\{3,6\}$	$\{4,5\}$
$\{\delta(p,a),\delta(q,a)\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$	$\{3,6\}$
$\{\delta(p,b),\delta(q,b)\}$	$\{3,6\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$

nicht zu D_1 hinzugefügt werden können, ist $D_2 = D_1 = D$.

Algorithmus für die Konstruktion von M'

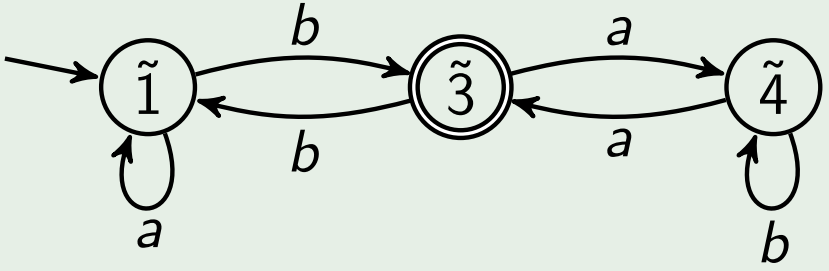
Beispiel

Betrachte den DFA M



2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Da die Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$ und $\{4,5\}$ nicht in D enthalten sind, können die Zustände 1 und 2, 3 und 6, sowie 4 und 5 verschmolzen werden. Demnach hat M' die Zustände $\tilde{1} = \{1,2\}$, $\tilde{3} = \{3,6\}$ und $\tilde{4} = \{4,5\}$:



◁

Direkte Konstruktion eines Minimal-DFA aus L

Bemerkung

- M' erreicht nach Lesen von x den Zustand $\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)}$. Wegen

$$\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)} = \widetilde{\hat{\delta}(q_0, y)} \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \sim \hat{\delta}(q_0, y)$$
$$\Leftrightarrow L_{\hat{\delta}(q_0,x)} = L_{\hat{\delta}(q_0,y)} \Leftrightarrow L_x = L_y$$

  können wir den Zustand $\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)}$ von M' auch mit L_x bezeichnen.

- Dies führt auf den zu M' isomorphen DFA $M_L = (Z_L, \Sigma, \delta_L, L_\varepsilon, E_L)$ mit

$$Z_L = \{L_x \mid x \in \Sigma^*\},\ E_L = \{L_x \mid x \in L\} \text{ und } \delta_L(L_x, a) = L_{xa},$$

  der sich direkt aus der Sprache L gewinnen lässt.

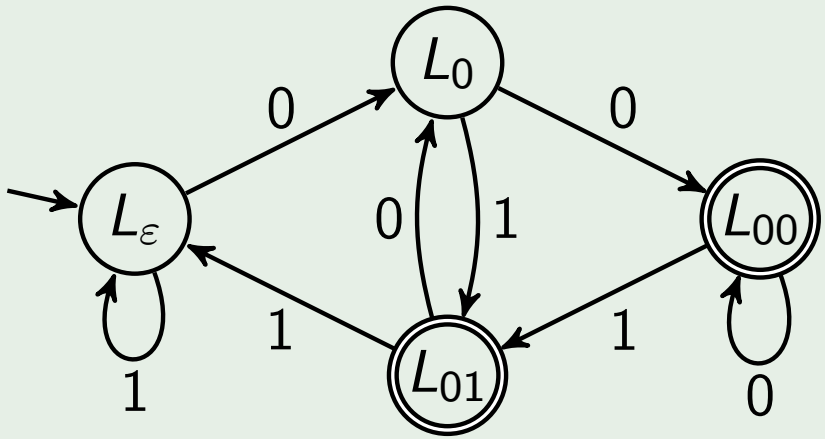
Direkte Konstruktion eines Minimal-DFA aus L

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$.
- Dann hat M_L die folgenden Sprachen als Zustände:

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \text{ oder } x \text{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0,1\}, & x = 0 \text{ oder } x \text{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon, 0, 1\}, & x \text{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \text{ endet mit } 01. \end{cases}$$

- Graphische Darstellung von M_L:



Der Satz von Myhill und Nerode

- Notwendig und hinreichend für die Existenz von M_L ist, dass die Menge $Z_L = \{L_x \mid x \in \Sigma^*\}$ endlich ist.
- L ist also genau dann regulär, wenn die Äquivalenzrelation R_L einen endlichen Index hat. Zur Erinnerung:

$$x \, R_L \, y \Leftrightarrow L_x = L_y$$

- Ist M ein DFA mit einer minimalen Anzahl von Zuständen, so haben die Zustände von M' die Form $\tilde{q} = \{q\}$, d.h. M ist isomorph zu M'.
- Da M' wiederum isomorph zu M_L ist, ist jeder minimale DFA M mit $L(M) = L$ isomorph zu M_L, d.h. für jede reguläre Sprache L gibt es bis auf Isomorphie nur einen Minimal-DFA.

Der Satz von Myhill und Nerode

Satz (Myhill und Nerode)

1. $\mathrm{REG} = \{L \mid \mathit{index}(R_L) < \infty\}$.
2. Sei L regulär und sei $\mathit{index}(R_L)$ der Index von R_L. Dann gibt es für L bis auf Isomorphie genau einen Minimal-DFA. Dieser hat $\mathit{index}(R_L)$ Zustände.

Der Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} für L

- Zwei Eingaben x und y überführen den DFA M_L genau dann in denselben Zustand, wenn $L_x = L_y$ ist (also xR_Ly gilt).
- Die Zustände von M_L können daher anstelle von L_x auch mit den Äquivalenzklassen $[x]$ von R_L (bzw. mit geeigneten Repräsentanten) benannt werden.
- Der resultierende Minimal-DFA M_{R_L} wird auch als Äquivalenzklassen-automat bezeichnet:

$$M_{R_L} = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon], E) \text{ mit } Z = \{[x] \mid x \in \Sigma^*\} \text{ und } E = \{[x] \mid x \in L\}.$$

- Für die Konstruktion von δ genügt es, ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ eine Folge von Wörtern $r_1, \ldots, r_k$ mit $[r_i] \neq [r_j]$ zu bestimmen, so dass zu jedem r_i und jedem Zeichen $a \in \Sigma$ ein r_j existiert mit $r_i a \in [r_j]$.
- In diesem Fall ist dann $\delta([r_i], a) = [r_i a] = [r_j]$.
- Die Konstruktion von M_{R_L} erfordert meist weniger Aufwand als die von M_L, da die Bestimmung der Sprachen L_x entfällt.

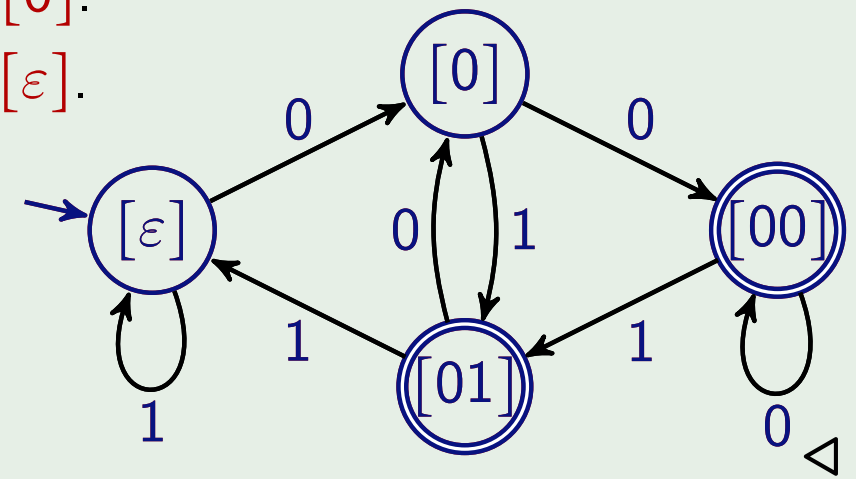
Direkte Konstruktion von M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich der Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.
8. Wegen $r_4 1 = 011 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([01], 1) = [\varepsilon]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	$[\varepsilon]$



Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index.

Wir können also beweisen, dass eine Sprache L **nicht** regulär ist, indem wir unendlich viele Wörter finden, die paarweise inäquivalent bzgl. R_L sind.

Nachweis von $L \notin \mathrm{REG}$ mittels Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Beweis

Die Wörter a^i, $i \geq 0$, sind bzgl. R_L paarweise inäquivalent.
Für $i \neq j$ gilt nämlich $\neg a^i R_L a^j$, da

$$b^i \in L_{a^i} \Delta L_{a^j}$$

enthalten ist. □

Das Pumping-Lemma

Frage

Wie lässt sich möglichst einfach zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist?

Antwort

Oft führt die Kontraposition folgender Aussage zum Ziel.

Satz (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl $l \geq 0$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ und
3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Das kleinste solche l wird auch die Pumping-Zahl von L genannt.

Das Pumping-Lemma

Beispiel

- Die Sprache

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

  lässt sich „pumpen“ (mit Pumping-Zahl $l = 3$).

- Sei $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq 3$.
  - 1. Fall: x hat das Präfix $\underline{ab}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = ab$.
  - 2. Fall: x hat das Präfix $a\underline{ab}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = a$ und $v = ab$.
  - 3. Fall: x hat das Präfix $\underline{aaa}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aaa$.
  - Restliche Fälle (Präfixe $\underline{ba}$, $b\underline{ba}$ und $\underline{bbb}$): analog.

Das Pumping-Lemma

Beispiel

- Sei L eine endliche Sprache.
- Offenbar lässt sich kein Wort $x \in L$ „pumpen“.
- Sei

$$l = \begin{cases} 1 + \max_{x \in L} |x|, & L \neq \varnothing, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Dann lässt sich jedes Wort $x \in L$ der Länge $\geq l$ „pumpen“, da solche Wörter gar nicht existieren. Also ist die Pumping-Zahl von $L \leq l$.
- Zudem gibt es im Fall $l > 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $l - 1$, das sich nicht „pumpen“ lässt. Somit ist die Pumping-Zahl von L auch $\geq l$.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ und
3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Das kleinste solche l wird auch die Pumping-Zahl von L genannt.

Das Pumping-Lemma

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit l Zuständen und sei $x = x_1 \dots x_n \in L$ mit $n = |x| \geq l$.
- Dann muss $M(x)$ nach spätestens l Schritten einen Zustand zum zweiten Mal annehmen, d.h. es ex. $0 \leq j < k \leq l$ und $z \in Z$ mit

$$\hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_j) = z \text{ und}$$

$$\hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_j x_{j+1} \dots x_k) = z.$$

- Setze $u = x_1 \dots x_j$, $v = x_{j+1} \dots x_k$ und $w = x_{k+1} \dots x_n$.
- Dann gilt $|v| = k - j \geq 1$ (d.h. $v \neq \varepsilon$), $k = |uv| \leq l$.
- Zudem gehört für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i w$ zu L, da wegen $\hat{\delta}(z, v) = z$

$$\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{z}, v^i), w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{z}, v), w) = \hat{\delta}(q_0, x)$$

in E ist. □

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

Die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

ist nicht regulär:

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L das Wort $x = a^l b^l$ mit $|x| = 2l \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ von $x = a^l b^l$ mit
  1. $v \neq \varepsilon$

  ist die Bedingung
  3. $uv^i w \in L$

  für alle $i \geq 2$ verletzt.

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel ($L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$)

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L ein Wort x mit $|x| = l^2 \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ mit $|u| = r$, $|v| = s$, $|w| = t$ und
  1. $v \neq \varepsilon$ (d.h. $s \geq 1$) sowie
  2. $|uv| \leq l$ (d.h. $r + s \leq l$)

  ist die Bedingung
  3. $uv^2w \in L$

  verletzt, da $r + 2s + t = l^2 + s$ keine Quadratzahl ist:

$$l^2 < l^2 + s < l^2 + l + 1 \leq (l+1)^2.$$

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel ($L = \{a^p \mid p \text{ prim}\} \notin \text{REG}$)

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L ein Wort x mit $|x| = p \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| = s$ und
  1. $v \neq \varepsilon$ (d.h. $s \geq 1$)

  ist die Bedingung
  3. $uv^i w \in L$

  wegen
  $$|uv^i w| = p + (i-1)s$$
  für $i = p+1$ verletzt, da dann
  $$|uv^i w| = p + ps = p(s+1)$$
  ist.

Grenzen des Pumping-Lemmas

Bemerkung

- Mit dem Pumping-Lemma können nicht alle Sprachen $L \notin \mathrm{REG}$ als nicht regulär nachgewiesen werden, da seine Umkehrung falsch ist.
- Betrachte die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}.$$

- Da jedes Wort $x \in L$ mit Ausnahme von ε „gepumpt“ werden kann, hat L die Pumping-Zahl 1.
- Allerdings ist L nicht regulär (siehe Übungen).

Erzeugung regulärer Ausdrücke mit einer Grammatik

Eine elegante Methode, Sprachen zu beschreiben, sind Grammatiken. Implizit haben wir hiervon bei der Definition der regulären Ausdrücke schon Gebrauch gemacht.

Beispiel

Die Sprache RA_Σ aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ lässt sich aus dem Symbol R unter Anwendung folgender Regeln erzeugen:

$$R \to \varnothing, \qquad R \to RR,$$
$$R \to \epsilon, \qquad R \to (R|R),$$
$$R \to a_i,\ i = 1, \ldots, k, \qquad R \to (R)^*.$$

Definition einer Grammatik

Definition

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V eine endliche Menge von Variablen (auch Nichtterminalsymbole genannt),
- Σ das Terminalalphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von Regeln (oder Produktionen) und
- $S \in V$ die Startvariable ist.

Bemerkung

Für $(u, v) \in P$ schreiben wir auch kurz $u \to_G v$ bzw. $u \to v$, wenn die benutzte Grammatik aus dem Kontext ersichtlich ist.

Die von einer Grammatik erzeugte Sprache

- Ein Wort $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ ist aus einem Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^+$ in einem Schritt ableitbar (kurz: $\alpha \Rightarrow_G \beta$), falls eine Regel $u \to_G v$ und Wörter $l, r \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit

  $$\alpha = lur \text{ und } \beta = lvr.$$

  Hierfür schreiben wir auch $l\underline{u}r \Rightarrow_G lvr$.
- Eine Folge $\sigma = (l_0, u_0, r_0), \ldots, (l_m, u_m, r_m)$ von Tripeln (l_i, u_i, r_i) heißt Ableitung von β aus α, falls gilt:
  - $l_0 u_0 r_0 = \alpha$, $l_m u_m r_m = \beta$ und
  - $l_i \underline{u_i} r_i \Rightarrow l_{i+1} u_{i+1} r_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, m-1$.

  Die Länge der Ableitung σ ist m und wir notieren σ auch in der Form

  $$l_0 \underline{u_0} r_0 \Rightarrow l_1 \underline{u_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{u_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow l_m u_m r_m.$$

- Die durch G erzeugte Sprache ist $L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}$.
- Ein Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow_G^* \alpha$ heißt Satzform von G.

Ableitungen in einer Grammatik

Zur Erinnerung:

- $\Rightarrow^*$ bezeichnet die reflexive, transitive Hülle der Relation $\Rightarrow$, d.h. $\alpha \Rightarrow^* \beta$ bedeutet, dass es ein $n \geq 0$ gibt mit $\alpha \Rightarrow^n \beta$.

  Hierzu sagen wir auch, β ist aus α (in n Schritten) ableitbar.
- $\Rightarrow^n$ bezeichnet das n-fache Produkt der Relation $\Rightarrow$, d.h. es gilt $\alpha \Rightarrow^n \beta$, falls Wörter $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ existieren mit
  - $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ und
  - $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Ableitung eines Wortes

Beispiel

- Wir betrachten nochmals die Grammatik

  $$G = (\{R\}, \Sigma', P, R) \text{ mit } \Sigma' = \Sigma \cup \{\varnothing, \epsilon, (,), |, ^*\}$$

  für die Sprache aller regulären Ausdrücke über Σ mit den Regeln

  $$\begin{aligned} P: \quad & R \to \varnothing, \epsilon, a, \ a \in \Sigma \\ & R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*. \end{aligned}$$

- Der reguläre Ausdruck $(01)^*(\epsilon|\varnothing)$ über $\Sigma = \{0, 1\}$ lässt sich in G aus dem Startsymbol R wie folgt ableiten:

  $$\begin{aligned} \underline{R} &\Rightarrow \underline{R}R \Rightarrow (\underline{R})^*R \Rightarrow (RR)^*\underline{R} \Rightarrow (\underline{R}R)^*(R|R) \\ &\Rightarrow (0\underline{R})^*(R|R) \Rightarrow (01)^*(\underline{R}|R) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\underline{R}) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\varnothing) \end{aligned}$$

Die Chomsky-Hierarchie

Man unterscheidet vier Typen von Grammatiken $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Definition

1. G heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
   (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to aB$, $A \to a$ oder $A \to \varepsilon$).
2. G heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $u \in V$, (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to \alpha$).
3. G heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $|v| \geq |u|$, (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, s. unten).
4. Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0.

Die ε-Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel $S \to \varepsilon$ zulässig.
Aber nur, wenn das Startsymbol S in keiner Regel rechts vorkommt.

Beispiel

- Wir betrachten nochmals die Grammatik

$$G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\varnothing, \epsilon, (,), |, ^*\}, P, R)$$

für die Sprache aller regulären Ausdrücke über Σ mit den Regeln

$$\begin{aligned} P: \quad & R \to \varnothing, \epsilon, a, \ a \in \Sigma \\ & R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*. \end{aligned}$$

- Da auf der linken Seite jeder Regel eine einzelne Variable steht, ist G kontextfrei.
- Offenbar ist G aber keine reguläre Grammatik, da zwar die $\|\Sigma\| + 2$ Regeln $R \to \varnothing, \epsilon, a, \ a \in \Sigma$, die geforderte Form haben, nicht jedoch die drei Regeln $R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*$.

Die Chomsky-Hierarchie

- Eine Sprache heißt vom Typ i bzw. regulär, kontextfrei oder kontextsensitiv, falls sie von einer entsprechenden Grammatik erzeugt wird.
- Damit erhalten wir die neuen Sprachklassen

$$\text{CFL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextfreie Grammatik}\}$$

(context free languages)

und

$$\text{CSL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextsensitive Grammatik}\}$$

(context sensitive languages).

- Da die Klasse der Typ 0 Sprachen mit der Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen übereinstimmt, bezeichnen wir diese Sprachklasse mit

$$\text{RE} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\}$$

(recursively enumerable languages).

Die Chomsky-Hierarchie

- Wir werden bald beweisen, dass die Sprachklassen

  $$\mathrm{REG} \subset \mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL} \subset \mathrm{RE}$$

  eine Hierarchie bilden (d.h. die Inklusionen sind echt), die so genannte Chomsky-Hierarchie.
- Zunächst rechtfertigen wir jedoch die Bezeichnung regulär für die regulären Grammatiken und für die von ihnen erzeugten Sprachen.

Reguläre Grammatiken

Satz

REG = $\{L(G) \mid G \text{ ist eine reguläre Grammatik}\}$.

Beweis von REG $\subseteq \{L(G) \mid G$ ist eine reguläre Grammatik$\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA.
- Wir konstruieren eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M)$.
- Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = Z$, $S = q_0$ und

$$P \quad = \quad \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}.$$

Reguläre Grammatiken

Beweis von $\mathrm{REG} \subseteq \{L(G) \mid G \text{ ist eine reguläre Grammatik}\}$

- Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = Z$, $S = q_0$ und

$$P \quad = \quad \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}.$$

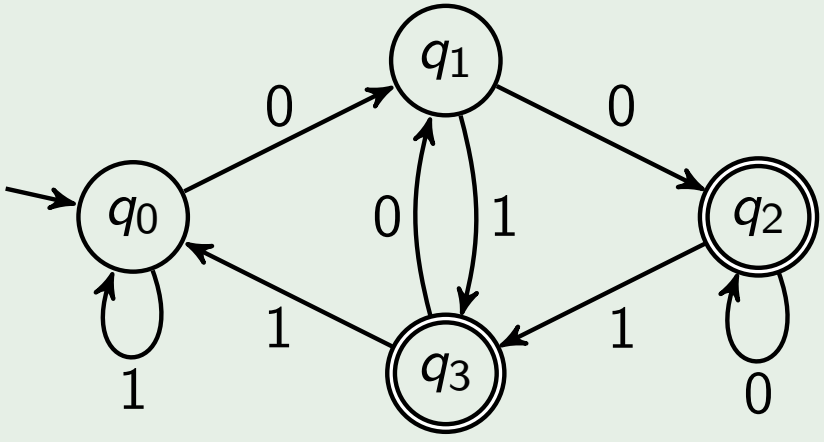
- Dann gilt für alle Wörter $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z\ \exists\, q_n \in E : \\ &\quad \delta(q_{i-1}, x_i) = q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V : \\ &\quad q_{i-1} \to x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V : \\ &\quad q_0 \Rightarrow^i x_1 \dots x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in L(G) \end{aligned}$$

□

Beispiel

Für den DFA



erhalten wir die Grammatik $G = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ mit

$$
\begin{aligned}
P: \quad & q_0 \to 1q_0,\ 0q_1, \\
& q_1 \to 0q_2,\ 1q_3, \\
& q_2 \to 0q_2,\ 1q_3,\ \varepsilon, \\
& q_3 \to 0q_1,\ 1q_0,\ \varepsilon.
\end{aligned}
$$

◁

Reguläre Grammatiken

- Offensichtlich lässt sich obige Konstruktion einer Grammatik G aus einem DFA M umdrehen, falls G keine Regeln der Form $A \to a$ enthält.
- Für den Beweis der Rückrichtung genügt es daher, alle Regeln dieser Form zu eliminieren.

Lemma

Zu jeder regulären Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik G', die keine Regeln der Form $A \to a$ hat.

Beweis

Betrachte die Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit

$$V' = V \cup \{X_{neu}\} \text{ und}$$

$$P' = \{A \to aX_{neu} \mid A \to_G a\} \cup \{X_{neu} \to \varepsilon\} \cup P \setminus (V \times \Sigma).$$

□

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$\begin{aligned} P: \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\ & B \to aC,\ bA,\ b, \\ & C \to aA,\ bB,\ a. \end{aligned}$$

- Wir ersetzen die Regeln $B \to b$ und $C \to a$ durch die Regeln $B \to bD$ und $C \to aD$ und fügen die Regel $D \to \varepsilon$ hinzu.
- Damit erhalten wir die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ mit

$$\begin{aligned} P': \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\ & B \to aC,\ bA,\ bD, \\ & C \to aA,\ bB,\ aD, \\ & D \to \varepsilon. \end{aligned}$$

Reguläre Grammatiken

Beweis von $\{L(G) \mid G \text{ ist eine reguläre Grammatik}\} \subseteq \text{REG}$

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik, die keine Regeln der Form $A \to a$ enthält.
- Drehen wir obige Konstruktion einer Grammatik aus einem DFA um, so erhalten wir den NFA

  $$M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$$

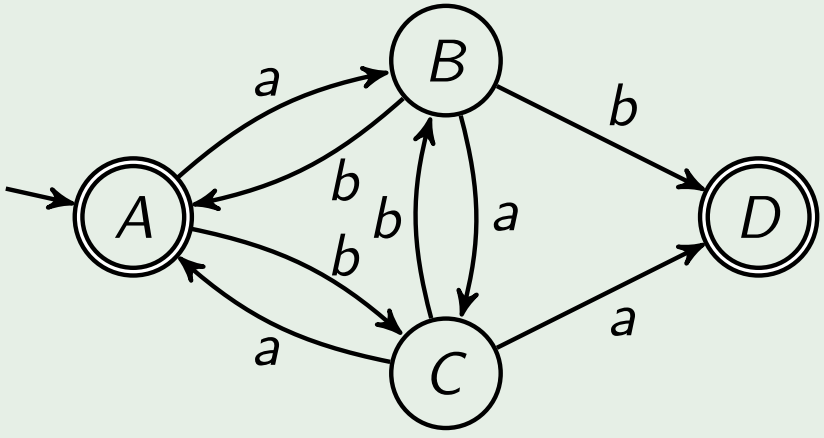
  mit $Z = V$, $\delta(A, a) = \{B \mid A \to_G aB\}$ und $E = \{A \mid A \to_G \varepsilon\}$.
- Genau wie oben folgt dann $L(M) = L(G)$. □

Beispiel (Fortsetzung)

Die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ mit

$$
\begin{aligned}
P' : \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\
& B \to aC,\ bA,\ bD, \\
& C \to aA,\ bB,\ aD, \\
& D \to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

führt auf den NFA



◁

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index,
- es gibt eine reguläre Grammatik G mit $L = L(G)$.