Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2012/13

Inhalt der Vorlesung

Themen dieser VL:

- **Welche Rechenmodelle sind adäquat?** **Automatentheorie**
- **Welche Probleme sind lösbar?** **Berechenbarkeitstheorie**
- **Welcher Aufwand ist nötig?** **Komplexitätstheorie**

Themen der VL Algorithmen und Datenstrukturen:

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? Algorithmik

Themen der VL Logik in der Informatik:

- Mathem. Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung Aussagenlogik, Prädikatenlogik

Maschinenmodelle

- Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle.
- Es gibt viele unterschiedliche math. Modelle.
- Diese können sich in der Berechnungskraft unterscheiden.
- Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann.
- Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.
  - endliche Automaten (DFA, NFA),
  - Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Algorithmenbegriff

- Der Begriff Algorithmus geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück.
- Ältester bekannter nicht-trivialer Algorithmus:
  Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.).
- Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er bei jeder zulässigen Problemeingabe nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte Ausgabe liefert.
- Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein.
- Diese werden über einem Eingabealphabet Σ kodiert.

Alphabet, Wort, Sprache

Definition

- Ein Alphabet ist eine geordnete endliche Menge

  $$\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}, \; m \geq 1$$

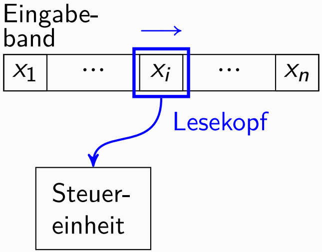
  von Zeichen a_i.
- Eine Folge $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^n$ heißt Wort (der Länge n).
- Die Menge aller Wörter über Σ ist

  $$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n.$$

- Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das leere Wort, welches wir mit ε bezeichnen.
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt Sprache über dem Alphabet Σ.

Das Rechenmodell des endlichen Automaten

Ein endlicher Automat



- nimmt zu jedem Zeitpunkt genau einen von endlich vielen Zuständen ein,
- macht bei Eingaben der Länge n genau n Rechenschritte und
- liest in jedem Schritt genau ein Eingabezeichen.

Formale Definition eines endlichen Automaten

Definition

Ein endlicher Automat (kurz: DFA; *deterministic finite automaton*) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion,
- $q_0 \in Z$ der Startzustand und
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist.

Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

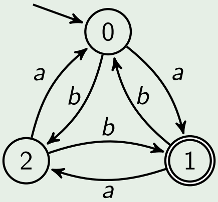
DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Beispiel

Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ ein DFA mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Endzustände werden durch einen doppelten Kreis und der Startzustand durch einen Pfeil gekennzeichnet.◁

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}, \quad \text{wobei}$$

- $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen von a in x bezeichnet und
- $i \equiv_m j$ bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist.

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist $\{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$.

Beweis der Behauptung durch Induktion über die Länge von x

Wir betrachten zunächst das Erreichbarkeitsproblem für DFAs.

Frage

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$. Welchen Zustand erreicht M bei Eingabe x nach i Schritten?

Antwort

- nach 0 Schritten: q_0,
- nach 1 Schritt: $\delta(q_0, x_1)$,
- nach 2 Schritten: $\delta(\delta(q_0, x_1), x_2)$,
- nach i Schritten: $\delta(\dots\delta(\delta(q_0, x_1), x_2), \dots x_i)$.

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Definition

- Bezeichne $\hat{\delta}(q,x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird.
- Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

  induktiv über die Länge von x wie folgt definieren.
- Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q,\varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q,xa) &= \delta(\hat{\delta}(q,x),a). \end{aligned}$$

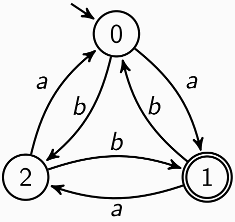
- Die von M erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,x) \in E\}$$

  schreiben.

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

M_3



Behauptung

$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$.

Beweis

- 1 ist der einzige Endzustand von M.
- Daher ist $L(M_3) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0,x) = 1\}$.
- Obige Behauptung ist also äquivalent zu

$$\hat{\delta}(0,x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1$$

- Folglich reicht es, folgende Kongruenzgleichung zu zeigen:

$$\hat{\delta}(0,x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$$

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Beweis von $\hat{\delta}(0,x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$:

Wir führen Induktion über die Länge n von x.

Induktionsanfang $n = 0$: klar, da $\hat{\delta}(0,\varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$:

- Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$.
- Nach IV gilt $i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n)$.
- Wegen $\delta(i,a) \equiv_3 i+1$ und $\delta(i,b) \equiv_3 i-1$ folgt

$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &= \#_a(x) - \#_b(x). \end{aligned}$$

- Folglich ist

$$\hat{\delta}(0,x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

$\square$

Die Klasse der regulären Sprachen

Definition

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als regulär bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathrm{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Frage

Welche Sprachen gehören zu REG und welche nicht?

Singletons sind regulär

Vereinbarung

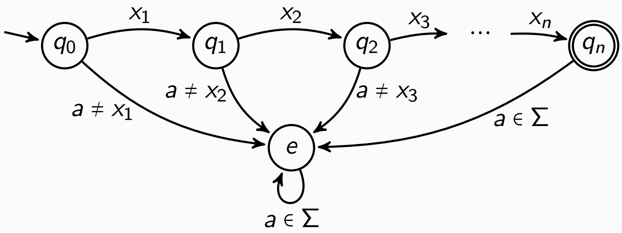
Für das Folgende sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein fest gewähltes Alphabet.

Beobachtung 1

Alle Sprachen, die nur ein Wort $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$ enthalten, sind regulär.

Beweis

Folgender DFA M erkennt die Sprache $L(M) = \{x\}$:



□

Abschlusseigenschaften von Sprachklassen

Definition

- Ein (k-stelliger) Sprachoperator ist eine Abbildung *op*, die k Sprachen $L_1, \dots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.
- Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter *op* abgeschlossen, wenn gilt:

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

- Der Abschluss von $\mathcal{K}$ unter *op* ist die (bzgl. Inklusion) kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter *op* abgeschlossen ist.

Beispiel

- Der 2-stellige Schnittoperator $\cap$ bildet aus zwei Sprachen L_1 und L_2 die Sprache $L_1 \cap L_2$.
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter Vereinigung besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen. $\triangleleft$

REG ist unter Komplement abgeschlossen

Beobachtung 2

Ist $L \in \mathrm{REG}$, so ist auch die Sprache $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ regulär.

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann akzeptiert der DFA

  $$\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, q_0, Z \setminus E)$$

  das Komplement $\overline{L}$ von L.

$\square$

REG ist unter Durchschnitt abgeschlossen

Beobachtung 3

Sind $L_1, L_2 \in \mathrm{REG}$, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis

- Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_i, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Dann wird der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

erkannt. M wird auch als Kreuzproduktautomat bezeichnet. □

REG ist unter Vereinigung abgeschlossen

Beobachtung 4

Die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ von regulären Sprachen L_1 und L_2 ist regulär.

Beweis

Es gilt $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$. $\square$

Frage

Wie sieht der zugehörige DFA aus?

Antwort

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), (E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)).$$

REG ist unter Mengenoperationen abgeschlossen

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung.

Wie umfangreich ist REG?

Folgerung

- Aus den Beobachtungen folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind.
- Da die reguläre Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Konstruktive Charakterisierung von REG

Frage

Lassen sich alle regulären Sprachen aus endlichen Sprachen mithilfe von einfachen Operationen gewinnen?

Definition

- Das Produkt (Verkettung, Konkatenation) der Sprachen L_1 und L_2 ist
  $$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}.$$
- Ist $L_1 = \{x\}$ einelementig (diese Sprachen werden auch als Singletonsprachen bezeichnet), so schreiben wir für $\{x\}L_2$ auch einfach xL_2.
- Die n-fache Potenz L^n einer Sprache L ist induktiv definiert durch
  $$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ L^{n-1}L, & n > 0. \end{cases}$$
- Die Sternhülle von L ist $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.
- Die Plushülle von L ist $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = LL^*$.

Überblick

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee

Ein nichtdeterministischer Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „erraten“.

Verbleibendes Problem

Zeige, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen.

Nichtdeterministische Automaten

Definition

- Ein nichtdet. endl. Automat (kurz: NFA; *nondet. finite automaton*)

  $$N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$$

  ist genau so aufgebaut wie ein DFA, nur dass er
  - eine Menge $Q_0 \subseteq Z$ von Startzuständen hat und
  - die Überführungsfunktion folgende Form hat:

    $$\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z).$$

  - Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen) von Z. Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet.
- Die von einem NFA N akzeptierte Sprache ist

  $$L(N) = \left\{ x_1 \ldots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_0 \in Q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E : \\ q_{i+1} \in \delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \ldots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Eigenschaften von NFAs

- Ein NFA N kann also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen.
- Die Eingabe x wird genau dann akzeptiert, wenn mind. eine Rechnung von N nach Lesen von x einen Endzustand erreicht.
- Im Gegensatz zu einem DFA, der jede Eingabe zu Ende liest, kann ein NFA N „stecken bleiben“.
- Dieser Fall tritt ein, wenn N in einen Zustand q gelangt, in dem er das nächste Eingabezeichen x_i wegen

  $$\delta(q, x_i) = \varnothing$$

  nicht verarbeiten kann.

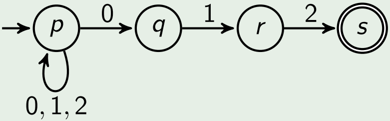
Eigenschaften von NFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ mit $Z = \{p, q, r, s\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $Q_0 = \{p\}$, $E = \{s\}$ und der Überführungsfunktion

δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\{p\}$	$\varnothing$	$\{s\}$	$\varnothing$

Graphische Darstellung:



- Dann ist $L(M) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ die Sprache aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. $\triangleleft$

Eigenschaften von NFAs

Beobachtung 5

Seien $N_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$ NFAs mit $L(N_i) = L_i$ für $i = 1, 2$. Dann wird auch das Produkt $L_1 L_2$ von einem NFA erkannt.

Beweis

- Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ annehmen.
- Die Sprache $L_1 L_2$ wird dann von dem NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, Q_1, E)$ mit

$$\delta(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \varnothing \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

akzeptiert. □

Eigenschaften von NFAs

Beobachtung 6

Ist $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA, so wird auch die Sprache $L(N)^*$ von einem NFA erkannt.

Beweis

Die Sprache $L(N)^*$ wird von dem NFA

$$N^* = (Z \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta_1, Q_0 \cup \{q_{neu}\}, E \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta_1(p, a) = \begin{cases} \delta(p, a), & p \in Z \setminus E, \\ \delta(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, a), & p \in E, \\ \varnothing, & p = q_{neu} \end{cases}$$

erkannt. $\square$

Überblick

Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt L_1L_2 bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee (bereits umgesetzt)

Ein nichtdeterministischer Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „erraten“.

Noch zu zeigen

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen.

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Satz (Rabin und Scott)

$\mathrm{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$.

Beweis von $\mathrm{REG} \subseteq \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Diese Inklusion ist klar, da jeder DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ leicht in einen äquivalenten NFA

$$N = (Z, \Sigma, \bar{\delta}, Q_0, E)$$

transformiert werden kann, indem wir $\bar{\delta}(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ und $Q_0 = \{q_0\}$ setzen. □

Für die umgekehrte Inklusion ist das Erreichbarkeitsproblem für NFAs von zentraler Bedeutung.

Das Erreichbarkeitsproblem für NFAs

Frage

Sei $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$. Welche Zustände kann $N(x)$ in i Schritten erreichen?

Antwort

- in 0 Schritten: alle Zustände in Q_0.
- in einem Schritt: alle Zustände in

$$Q_1 = \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, x_1).$$

- in i Schritten: alle Zustände in

$$Q_i = \bigcup_{q \in Q_{i-1}} \delta(q, x_i).$$

Simulation von NFAs durch DFAs

Idee

- Wir können einen NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ durch einen DFA $M = (Z', \Sigma, \delta', q'_0, E')$ simulieren, der in seinem Zustand die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte.
- Die Zustände von M sind also Teilmengen Q von Z (d.h. $Z' = \mathcal{P}(Z)$) mit Q_0 als Startzustand (d.h. $q'_0 = Q_0$) und der Endzustandsmenge

  $$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\}.$$

- Die Überführungsfunktion $\delta' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ von M berechnet dann für einen Zustand $Q \subseteq Z$ und ein Zeichen $a \in \Sigma$ die Menge

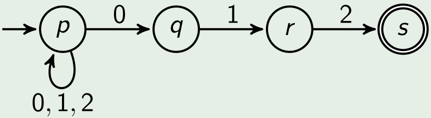
  $$\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a)$$

  aller Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest.

Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA N



  mit Startzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und Endzustandsmenge $E = \{s\}$.
- Ausgehend von Q_0 liefert δ' dann die folgenden Werte:

δ'	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$

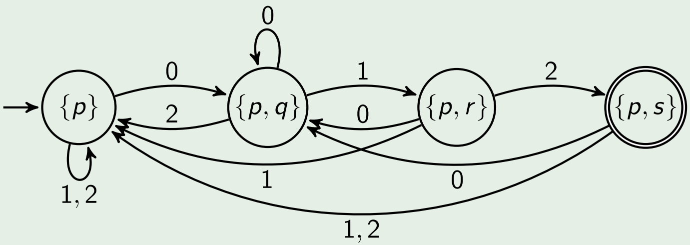
Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Ausgehend von Q_0 liefert δ' dann die folgenden Werte:

δ'	$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p, s\}$
0	$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, q\}$
1	$\{p\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
2	$\{p\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$	$\{p\}$

- Also ist N äquivalent zu folgendem Potenzmengenautomaten M:



◁

Simulation von NFAs durch DFAs

Bemerkung

- Im obigen Beispiel werden für die Konstruktion des Potenzmengen-automaten nur 4 der insgesamt

$$\|\mathcal{P}(Z)\| = 2^{\|Z\|} = 2^4 = 16$$

  Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände nicht erreichbar sind.
- Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände benötigt werden (siehe Übungen).

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Beweis von $\{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\} \subseteq \mathrm{REG}$

- Sei $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$ der zugehörige Potenzmengenautomat mit $\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a)$ und $E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\}$.
- Dann folgt die Korrektheit von M leicht mittels folgender Behauptung, deren Beweis wir auf der nächsten Folie nachholen.

Behauptung

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

- Für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt

$$\begin{aligned} x \in L(N) &\Leftrightarrow N \text{ kann nach Lesen von } x \text{ einen Endzustand erreichen} \\ &\overset{\text{Beh.}}{\Leftrightarrow} \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(Q_0, x) \in E' \\ &\Leftrightarrow x \in L(M). \end{aligned}$$

□

Beweis der Behauptung

Behauptung

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

Beweis durch Induktion über die Länge n von x

$n = 0$: klar, da $\hat{\delta}'(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Sei $x = x_1 \ldots x_n$ gegeben. Nach IV enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}'(Q_0, x_1 \ldots x_{n-1})$$

die Zustände, die N nach Lesen von $x_1 \ldots x_{n-1}$ erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}'(Q_0, x) = \delta'(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}'(Q_0, x)$ die Zustände, die N nach Lesen von x erreichen kann. $\square$

Abschlusseigenschaften der Klasse REG

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

Überblick

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endl. Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar ist.

Bereits gezeigt:

Jede Sprache, die mittels der Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle (sowie Durchschnitt und Komplement) angewandt auf endliche Sprachen darstellbar ist, ist regulär.

Noch zu zeigen:

Jede reguläre Sprache lässt sich aus endlichen Sprachen mittels Vereinigung, Produkt und Sternhülle erzeugen.

Konstruktive Charakterisierung von REG

Induktive Definition der Menge *RA* aller regulären Ausdrücke

Die Symbole $\varnothing$, ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke, die

- die leere Sprache $L(\varnothing) = \varnothing$,
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\varepsilon\}$ und
- für jedes $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$ beschreiben.

Sind α und β reguläre Ausdrücke, die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke, die folgende Sprachen beschreiben:

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$,
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$.

Reguläre Ausdrücke

Beispiel

Die regulären Ausdrücke ϵ^*, $\varnothing^*$, $(0|1)^*00$ und $(\epsilon 0|\varnothing 1^*)$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	ϵ^*	$\varnothing^*$	$(0\|1)^*00$	$(\epsilon 0\|\varnothing 1^*)$
$L(\gamma)$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

$\triangleleft$

Vereinbarungen

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende Präzedenzordnung: Der Sternoperator * bindet stärker als der Produktoperater und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator.
- Für $((a|b(c)^*)|d)$ können wir also kurz $a|bc^*|d$ schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$.

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

$\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\} \subseteq \mathrm{REG}$.

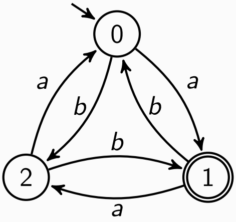
Beweis.

Klar, da

- die Basisausdrücke $\emptyset$, ϵ und a, $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und
- die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist. □

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

M_3:



Frage

Wie lässt sich die Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

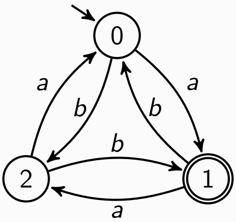
durch einen regulären Ausdruck beschreiben?

Antwort

- Sei $L_{0,0}$ die Sprache aller Wörter, die M_3 vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen und sei $L_{0,0}^{\neq 0}$ die Teilsprache der Wörter $x \neq \varepsilon$, die dies tun ohne zwischendurch den Zustand 0 zu besuchen.
- Dann gilt $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$, wobei sich $L_{0,0}^{\neq 0}$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreiben lässt:

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb).$$

Antwort (Fortsetzung)



- Dann gilt $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$, wobei sich $L_{0,0}^{\neq 0}$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreiben lässt:

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb).$$

- Weiter sei $L_{0,1}^{\neq 0}$ die Sprache aller Wörter, die M_3 vom Zustand 0 in den Zustand 1 überführen ohne zwischendurch den Zustand 0 zu besuchen.
- Dann gilt $L(M_3) = L_{0,1} = L_{0,0}L_{0,1}^{\neq 0}$, wobei sich $L_{0,1}^{\neq 0}$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreiben lässt:

$$\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*.$$

- Also ist $L(M_3)$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreibbar:

$$\gamma_{0,1} = (\gamma_{0,0}^{\neq 0})^* \gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*(a|bb)(ab)^*.$$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

$\mathrm{REG} \subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}$.

Beweis

- Wir konstruieren zu einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$.
- Wir nehmen an, dass $Z = \{1, \ldots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist.
- Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

  $$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

  von Sprachen der Form $L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$ darstellen.
- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \le p, q \le m$ anzugeben.

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$.

Beweis (Fortsetzung)

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \le p, q \le m$ anzugeben.
- Hierzu betrachten wir für $r = 0, \ldots, m$ die Sprachen

$$L^r_{p,q} = \left\{ x \in L_{p,q} \,\middle|\, \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \text{ ist } \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_i) \le r \right\}.$$

- Wegen $L_{p,q} = L^m_{p,q}$ reicht es, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L^r_{p,q}$ mit $1 \le p, q \le m$ und $0 \le r \le m$ anzugeben.
- Wir zeigen induktiv über r, dass die Sprachen $L^r_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$.

Beweis (Schluss)

- Wir zeigen induktiv über r, dass die Sprachen $L^r_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

  $r = 0$: In diesem Fall sind die Sprachen

  $$L^0_{p,q} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\}, & p \neq q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

  endlich und somit durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

  $r \rightsquigarrow r+1$: Wegen

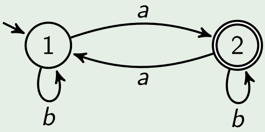
  $$L^{r+1}_{p,q} = L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}$$

  sind mit $L^r_{p,q}$, $1 \leq p,q \leq m$, auch die Sprachen $L^{r+1}_{p,q}$, $1 \leq p,q \leq m$, durch reguläre Ausdrücke beschreibbar. □

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^{2}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Um reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^{r}$ für die Sprachen $L_{p,q}^{r}$ zu bestimmen, benutzen wir für $r \geq 0$ die Rekursionsformel

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^{r} | \gamma_{p,r+1}^{r} (\gamma_{r+1,r+1}^{r})^{*} \gamma_{r+1,q}^{r}.$$

- Damit erhalten wir

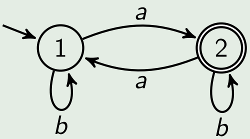
$$\begin{aligned}
\gamma_{1,2}^{2} &= \gamma_{1,2}^{1} | \gamma_{1,2}^{1} (\gamma_{2,2}^{1})^{*} \gamma_{2,2}^{1}, \\
\gamma_{1,2}^{1} &= \gamma_{1,2}^{0} | \gamma_{1,1}^{0} (\gamma_{1,1}^{0})^{*} \gamma_{1,2}^{0}, \\
\gamma_{2,2}^{1} &= \gamma_{2,2}^{0} | \gamma_{2,1}^{0} (\gamma_{1,1}^{0})^{*} \gamma_{1,2}^{0}.
\end{aligned}$$

- Es genügt also, die regulären Ausdrücke $\gamma_{1,1}^{0}$, $\gamma_{1,2}^{0}$, $\gamma_{2,1}^{0}$, $\gamma_{2,2}^{0}$, $\gamma_{1,2}^{1}$, $\gamma_{2,2}^{1}$ und $\gamma_{1,2}^{2}$ zu berechnen.

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



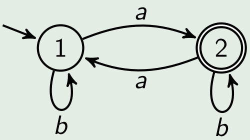
Rekursionsformeln

$$L^0_{p,p} = \{a \mid \delta(p,a) = p\} \cup \{\varepsilon\},$$
$$L^0_{p,q} = \{a \mid \delta(p,a) = q\} \text{ für } p \neq q,$$
$$L^{r+1}_{p,q} = L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}.$$

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0				
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$L^0_{1,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1,a) = 1\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

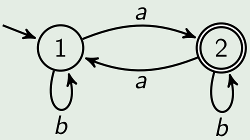
$$\rightsquigarrow \ \gamma^0_{1,1} = \epsilon | b$$

r	p, q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \| b$			
1				
2				

◁

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$L^0_{1,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1,a) = 2\} = \{a\}$$

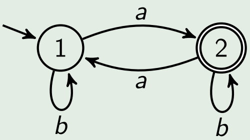
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{1,2} = a$$

r	p,q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon \vert b$	a		
1				
2				

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

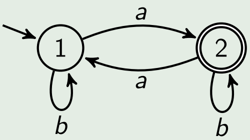
$$L^0_{2,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2,a) = 1\} = \{a\}$$

$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,1} = a$$

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \vert b$	a	a	
1				
2				

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$L^0_{2,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2,a) = 2\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

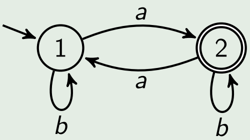
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,2} = \epsilon|b$$

r	p,q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-			
2				

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

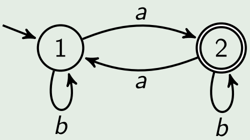
$$\gamma_{1,2}^{1} = \gamma_{1,2}^{0} | \gamma_{1,1}^{0} (\gamma_{1,1}^{0})^* \gamma_{1,2}^{0}$$
$$= a | (\epsilon | b)(\epsilon | b)^* a$$
$$\equiv b^* a$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon \| b$	a	a	$\epsilon \| b$
1	-	$b^* a$		
2				

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

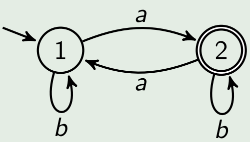
$$\gamma^1_{2,2} = \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}$$
$$= (\epsilon|b)|a(\epsilon|b)^* a$$
$$\equiv \epsilon|b|ab^* a$$

r	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-	$b^* a$	-	$\epsilon\|b\|ab^* a$
2	-			

(Column heading over 1,1 … 2,2: p, q)

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}\gamma_{1,2}^{2} &= \gamma_{1,2}^{1} | \gamma_{1,2}^{1} (\gamma_{2,2}^{1})^{*} \gamma_{2,2}^{1} \\ &= b^{*}a | b^{*}a(\epsilon|b|ab^{*}a)^{*}(\epsilon|b|ab^{*}a) \\ &\equiv b^{*}a(b|ab^{*}a)^{*}\end{aligned}$$

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-	$b^{*}a$	-	$\epsilon\|b\|ab^{*}a$
2	-	$b^{*}a(b\|ab^{*}a)^{*}$	-	-

◁

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- L lässt sich mit den Operationen $\cap$, $\cup$, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Ausblick

- Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Anzahl der Zustände eines DFA minimieren lässt.
- Da hierbei Äquivalenzrelationen eine wichtige Rolle spielen, befassen wir uns zunächst mit Relationalstrukturen.