Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 22. 02. 2013 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Teilnahme nur mit Übungsschein.
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.
- Am 19.2.2013 findet von 15:15 bis 16:45 in RUD26 0'307 eine Fragestunde statt.

Hinweis zur Probeklausur:

- Für die Probeklausur sollten Sie von einer Bearbeitungszeit von 180 Minuten ausgehen (d. h. 1 Punkt entspricht 1 Minute).

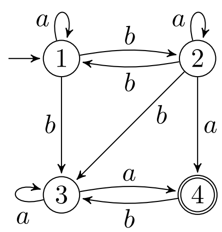
Aufgabe 1 Sei R eine Relation auf einer Menge A. ***25 Punkte***
Wir definieren zu R folgende Relation R' auf der Menge $A \times A$:

$$(a_1, a_2) R' (b_1, b_2) :\Leftrightarrow a_1 R b_1 \wedge a_2 R b_2.$$

Zeigen Sie:

(a) R' ist genau dann eine Ordnung, wenn R eine Ordnung ist.
(b) R' ist genau dann eine lineare Ordnung, wenn $R = id_A$ und $\|A\| = 1$ ist.
(c) R ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn $id_A \subseteq R^2 \subseteq R^T$ gilt.

Aufgabe 2 Betrachten Sie den folgenden NFA N. ***35 Punkte***



(a) Welche der Wörter ε, bb, aba und bab gehören zu $L = L(N)$?
(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA M um.
(c) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
(d) Geben Sie für jedes Wortpaar $x, y \in \{\varepsilon, aa, abb, bbb\}$ an, ob $x R_L y$ gilt oder nicht. Begründen Sie.
(e) Geben Sie ein Repräsentantensystem für R_L an.
(f) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für $\overline{L(N)}$ an.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Sprachen $A = \{a^i b^j c^k \mid \min(i,j) \le k\}$, $B = \{a^i b^j c^k \mid 0 < i < j < k\}$ und $C = \{a^{2^n} \mid n \ge 0\}$. ***40 Punkte***

(a) Geben Sie einen PDA für A an.
(b) Zeigen Sie ohne Benutzung des Pumping-Lemmas, dass A nicht regulär ist.
(c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $\overline{B}$ an.
(d) Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für B an.
(e) Zeigen Sie, dass B nicht kontextfrei ist.
(f) Beschreiben Sie informell einen DLBA für die Sprache C.

Aufgabe 4 ***15 Punkte***
Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $P: S \to AB, AC; A \to AA, a; C \to SB; B \to a, b$.

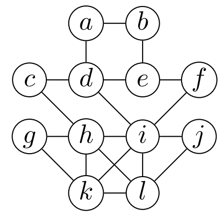
(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung von $L(G)$ an.
(b) Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $x = aabbb$ in $L(G)$ ist.

Aufgabe 5 ***30 Punkte***
Bestimmen Sie jeweils die kleinste Stufe der arithmetischen Hierarchie, in der die folgenden Sprachen liegen. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, w \in L(M_w) \right\}$
(b) $L_2 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, w \notin L(M_w) \right\}$
(c) $L_3 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \|L(M_w)\| > 5 \right\}$
(d) $L_4 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \|L(M_w)\| < 5 \right\}$
(e) $L_5 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = x \right\}$
(f) $L_6 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) \ne x \right\}$

Aufgabe 6 ***10 Punkte***
Sei EXACT-3-SAT die Einschränkung von 3-SAT auf KNF-Formeln mit genau 3 verschiedenen Literalen pro Klausel. Zeigen Sie, dass EXACT-3-SAT NP-vollständig ist.
Hinweis: Finden Sie eine EXACT-3-SAT-Formel G mit $G(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Aufgabe 7 Betrachten Sie nebenstehenden Graphen G. ***25 Punkte***
Bestimmen Sie die folgenden Parameter. Begründen Sie.



(a) $\alpha(G) = \max\left\{\|S\| \,\middle|\, S \text{ ist stabil in } G\right\}$,
(b) $\chi(G) = \min\left\{k \ge 1 \,\middle|\, G \text{ ist } k\text{-färbbar}\right\}$,
(c) $\mu(G) = \max\left\{\|M\| \,\middle|\, M \text{ ist ein Matching in } G\right\}$,
(d) $\omega(G) = \max\left\{\|C\| \,\middle|\, C \text{ ist eine Clique in } G\right\}$,
(e) $\beta(G) = \min\left\{\|U\| \,\middle|\, U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\right\}$.

Wie viele Kanten müssen zu G mindestens hinzugefügt werden, um eine Eulerlinie, Eulertour, einen Hamiltonpfad oder Hamiltonkreis zu erhalten? Begründen Sie.