

Übungsblatt 13

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 28. 01.–1. 02. 2013
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 6. 2. 2013

Aufgabe 99 Zeigen Sie: *mündlich*

- Das Äquivalenzproblem für RE liegt in Π_2 .
- Das Ausschöpfungsproblem für RE ist Π_2 -hart.
- Folgern Sie, dass das Ausschöpfungs-, das Äquivalenz- und das Inklusionsproblem für RE Π_2 -vollständig sind.

Aufgabe 100 *mündlich*

Für ein Wort $w \in \{0, 1, \#\}^*$ sei $d(w)$ das längste Präfix von w in $\{0, 1\}^*$. Weiter sei

$$D_{i+1} = \begin{cases} \{w \in \{0, 1, \#\}^* \mid w \in L(M_{d(w)})\}, & i = 0 \\ \exists \bar{D}_i, & i \geq 1. \end{cases}$$

- Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass $D_i \in \Sigma_i \setminus \Pi_i$ für alle $i \geq 1$ gilt.
- Folgern Sie $\Sigma_i \subsetneq \Delta_{i+1} \subsetneq \Sigma_{i+1}$ und $\Pi_i \subsetneq \Delta_{i+1} \subsetneq \Pi_{i+1}$ für alle $i \geq 1$.

Aufgabe 101 *mündlich*

Geben Sie LOOP-, WHILE- und GOTO-Programme für die Funktionen $f(x, y) = x \text{ MOD } y$ und $g(x, y) = x \text{ DIV } y$ an. Hierbei ist $x \text{ MOD } y$ die kleinste Zahl $r \geq 0$, so dass $x - r = dy$ für ein $d \geq 0$ ist, und $x \text{ DIV } y$ das entsprechende d .

Aufgabe 102 *mündlich, optional*

- Sei $b(n)$ die maximale Anzahl von Rechenschritten, die ein GOTO-Programm, das aus höchstens $n + 1$ Befehlen besteht und keine Konstante $c > n$ enthält, bei Eingabe 0 machen kann, ohne in eine Endlosschleife zu geraten. Zeigen Sie, dass $b(n)$ total und nicht GOTO-berechenbar ist.
- Überlegen Sie, wie sich aus der Kenntnis einer Schranke $s \geq b(100)$ konstruktiv ein Algorithmus zur Entscheidung der Goldbachvermutung gewinnen lässt.

Aufgabe 103 *mündlich*

Für eine Reihe von algorithmischen Problemstellungen wurden 6 verschiedene Algorithmen mit folgenden Laufzeiten entworfen ($\log n$ steht als Abkürzung für $\lceil \log_2 n \rceil$):

Algorithmus	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Laufzeit	$5 \cdot 10^8 n$	$10^5 n \log n$	$10^3 n^2$	$10 \cdot 2^{n/2}$	2^{2n}	$n!$

Die Algorithmen werden auf einem Rechner implementiert, der mit einer Geschwindigkeit von 10^9 Operationen pro Sekunde arbeitet.

- Bestimmen Sie jeweils die maximale Länge n_1 der Probleminstanzen, die mit diesen Algorithmen innerhalb einer Minute lösbar sind.
- Sei n_2 die maximale Eingabelänge, die ein Rechner mit k -facher Geschwindigkeit in dieser Zeit bewältigt. Welche Beziehung besteht jeweils zwischen n_1 und n_2 ?

Aufgabe 104 *mündlich, optional*

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$. Beschreiben Sie eine möglichst zeiteffiziente 1-DTM M und eine möglichst zeiteffiziente 2-DTM M' für L . Vergleichen Sie die asymptotischen Laufzeiten von M und M' .

Aufgabe 105 Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$. Stimmen folgende Aussagen? **10 Punkte**

- $\sum_{i=1}^n i = \mathcal{O}(n^2)$ *(mündlich)*
- $f(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ *(mündlich)*
- $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$ *(mündlich)*
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(mündlich)*
- $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$ *(mündlich)*
- Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f^2(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$ *(mündlich)*
- Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f(n^2) = \mathcal{O}(g(n^2))$ *(5 Punkte)*
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 106 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie. **10 Punkte**

- Jede Sprache $L \in \text{RE}$ mit $L \leq \bar{L}$ ist entscheidbar.
- Jede Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ mit $\bar{L} \leq L$ ist entscheidbar.
- $\text{P} = \text{NP} \Rightarrow \text{NP} = \text{co-NP}$, *(mündlich)*
- $\text{NP} \subseteq \text{co-NP} \Leftrightarrow \text{co-NP} \subseteq \text{NP}$, *(mündlich)*
- $\text{NP} \cup \text{co-NP}$ ist unter Komplement abgeschlossen, *(mündlich)*
- NP enthält keine co-NP -harte Sprache, außer wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist, *(5 Punkte)*
- $\text{NPC} = \text{P} \Rightarrow \text{EXP} = \text{P}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 107 Zeigen Sie: **10 Punkte**

- $\text{CFL} \subsetneq \text{P}$, *(mündlich)*
- $\text{REG} \subsetneq \text{L}$ und $\text{L} \not\subseteq \text{CFL}$. *(5 Punkte)*
- \leq^p ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. *(5 Punkte)*