

Übungsblatt 12

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 21.–25. 01. 2013
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 30. 1. 2013

Aufgabe 91

mündlich

(a) Entscheiden Sie die beiden folgenden PCP-Instanzen:

$$\begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

- (b) Zeigen Sie, dass PCP_{Σ} über einem unären Alphabet Σ entscheidbar ist.
 (c) Reduzieren Sie PCP auf MPCP.

Aufgabe 92

mündlich

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ mit folgenden Regeln:

$$P: A \rightarrow BabC \quad (1) \quad Ba \rightarrow Cba, aBa \quad (2, 3) \quad bC \rightarrow bCb \quad (4) \quad C \rightarrow ab \quad (5)$$

- (a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $w = aabbababb$ in G an.
 (b) Sei $\Gamma = \{A, B, C, a, b, \langle, |, \rangle\}$ und sei f die in der Vorlesung definierte Funktion, die $L(G)$ auf $MPCP_{\Gamma}$ reduziert. Geben Sie für ein beliebiges Wort $w \in \{a, b\}^*$ explizit die zugehörige $MPCP_{\Gamma}$ -Instanz $f(w)$ an.
 (c) Bestimmen Sie alle $MPCP_{\Gamma}$ -Lösungen α minimaler Länge für $f(w)$. Begründen Sie. Geben Sie zu jedem solchen α auch das entsprechende Lösungswort an.

Aufgabe 93

mündlich, optional

Sei $PCP^{\leq k}$ die Einschränkung von PCP auf Instanzen mit höchstens k Wortpaaren. Ist $PCP^{\leq k}$ für jedes $k \geq 1$ entscheidbar? Begründen Sie.

Aufgabe 94

mündlich

- (a) Das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen.
 (b) Das Äquivalenz-, Schnitt- und Inklusionsproblem für reguläre Sprachen.

Aufgabe 95

mündlich, optional

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^* entscheidbar ist:

$$\text{Gegeben: Eine PCP-Instanz } \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}.$$

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.

Aufgabe 96

mündlich

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G .

Gefragt: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Hinweis: Reduzieren Sie das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf dieses Entscheidungsproblem.

Aufgabe 97

30 Punkte

Für eine Folge $s = (x_1, \dots, x_k)$ von Strings $x_i \in \{a, b\}^*$ sei L_s die Sprache

$$\{i_n \dots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, 1, \dots, k\}$ und für zwei solche Folgen s und t sei $L_{s,t}$ die Sprache $L_s \cap L_t$. Zeigen Sie:

- (a) L_s und L_t sind in DCFL und $L_{s,t}$ ist in co-CFL. (7 Punkte)
 (b) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig. (7 Punkte)
 (c) Das Inklusionsproblem für DPDAs ist co-RE-vollständig. (8 Punkte)
 (d) Das Problem, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = L(G)^R$ ist, ist co-RE-vollständig. (8 Punkte)

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie die Äquivalenz $L_{s,t} = L_{s,t}^R \Leftrightarrow L_{s,t} = \emptyset$.

Aufgabe 98

20 Zusatzpunkte

- (a) Die Quersumme einer PCP-Lösung $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ sei $s(\alpha) = \sum_{j=1}^n i_j$. Berechnen Sie die Länge n_{\min} der kürzesten Lösung α_{\min} für die Instanz

$$I = \begin{pmatrix} aaba & baab & a \\ a & aa & aab \end{pmatrix}$$

sowie $s(\alpha_{\min})$. Hinweis: n_{\min} ist eine 3-stellige Dezimalzahl. (10 Zusatzpunkte)

- *(b) Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^{**} entscheidbar ist.

$$\text{Gegeben: Eine PCP-Instanz } I = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}.$$

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_n und j_1, \dots, j_n mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^{**} auf das Komplement des Leerheitsproblems für kontextfreie Sprachen, d.h. transformieren Sie I in eine kontextfreie Sprache L_I mit $I \in PCP^{**} \Leftrightarrow L_I \neq \emptyset$. (10 Zusatzpunkte)