Übungsblatt 11

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 14.–18. 01. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 23. 1. 2013

Aufgabe 82 Für $D \in \{L, R, N\}$ sei ***mündlich***

$$L_{\neg D} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \begin{array}{l} M_w \text{ ist eine 1-DTM, die bei Eingabe } \varepsilon \\ \text{niemals die Kopfbewegung } D \text{ ausführt} \end{array} \right\}.$$

Für welche Werte von D ist die Sprache $L_{\neg D}$ entscheidbar? Begründen Sie.

Aufgabe 83 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.
(b) Die Klasse RE ist unter $\leq$ abgeschlossen.
(c) Die Sprache $B = \{1\}$ ist REC-vollständig.
(d) Das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig.

Aufgabe 84 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Sprache $\{w\#x\#y \mid w, x, y \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine DTM mit } M_w(x) = y\}$ ist RE-vollständig.
(b) Eine Sprache A ist genau dann RE-vollständig, wenn $\bar{A}$ co-RE-vollständig ist.
(c) Es gibt keine RE-vollständige Sprache, die auch co-RE-vollständig ist.

Aufgabe 85 Sind folgende Aussagen wahr? Begründen Sie. ***mündlich***

(a) Aus $A \leq B$ und $B \in \mathsf{CSL}$ folgt $A \in \mathsf{CSL}$.
(b) Wenn A^* regulär ist, dann kann $A \cap \{1\}^*$ unentscheidbar sein.
(c) A^* ist für jede Sprache $A \subseteq \{0,1\}^*$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 86 ***mündlich, optional***

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C:

(a) $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
(b) $A \oplus B$ ist genau dann entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.
(c) $A \oplus B$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn A und B semientscheidbar sind.
(d) Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gilt.

Aufgabe 87 Zeigen Sie: ***mündlich, optional***

(a) Durch $A \equiv B :\Leftrightarrow A \leq B$ und $B \leq A$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Sprachen definiert.

   Bemerkung: Die durch A repräsentierte Äquivalenzklasse $[A]$ wird auch der *Grad* (engl. *degree*) von A genannt und mit $\deg(A)$ bezeichnet.

(b) Durch $\deg(A) \leq \deg(B) :\Leftrightarrow A \leq B$ wird eine Ordnung auf der Menge der Grade definiert.

   Hinweis: Zeigen Sie insbesondere, dass diese Ordnung wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

(c) Bestimmen Sie das Infimum von $\deg(H)$ und $\deg(\bar{H})$.
(d) Jede endliche nichtleere Menge von Graden besitzt ein Supremum.

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst zweielementige Mengen.

Aufgabe 88 ***15 Punkte***

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$ *(mündlich)*
(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$ *(mündlich)*
(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$ *(3 Punkte)*
(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ *(3 Punkte)*
(e) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ besucht kein Bandfeld mehrmals}\}$ *(3 Punkte)*
(f) $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) = w\}$ *(3 Punkte)*
(g) $L_7 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 89 ***10 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $\mathrm{Eq} = \{v\#u \mid L(M_v) = L(M_u)\}$. Zeigen Sie:

(a) Das Halteproblem lässt sich auf Eq reduzieren. *(4 Punkte)*
(b) Das Halteproblem lässt sich auf $\overline{\mathrm{Eq}}$ reduzieren. *(4 Punkte)*
(c) Weder Eq noch $\overline{\mathrm{Eq}}$ sind semi-entscheidbar. *(2 Punkte)*

Aufgabe 90 Für eine Sprachklasse $\mathcal{S}$ sei ***5 Punkte***

$$L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}.$$

Beweisen sie folgende Variante des Satzes von Rice: $L_{\mathcal{S}}$ ist unentscheidbar, außer wenn $L_{\mathcal{S}} \in \{\varnothing, \{0,1\}^*\}$ ist.