

Übungsblatt 4

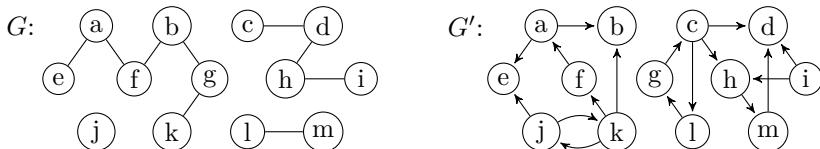
*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 12.–16. 11. 2012
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 21. 11. 2012*

Aufgabe 24

mündlich

Ein (gerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt (*stark*) zusammenhängend, wenn jeder Knoten y von jedem Knoten x aus über einen Weg in G erreichbar ist. Die bzgl. Teilgraphenordnung maximalen (stark) zusammenhängenden Teilgraphen von G bezeichnen wir als die (*starken*) Zusammenhangskomponenten von G . Dabei heißt $G' = (V', E')$ Teilgraph von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt.

- (a) Geben Sie die (starken) Zusammenhangskomponenten von folgenden (gerichteten) Graphen an:



- (b) Betrachten Sie die Relationen Z und S , wobei xZy (xSy) genau dann gilt, wenn x und y in derselben (starken) Zusammenhangskomponente liegen. Wie lassen sich Z und S durch die Kantenrelation E ausdrücken? Begründen Sie.
(c) Lösen Sie (a) und (b) für den *schwachen Zusammenhang* in G' . Hierbei sollen zwei Knoten x und y genau dann in derselben schwachen Zusammenhangskomponente eines Digraphen liegen (in Zeichen: xWy), wenn y von x aus oder x von y aus über einen Weg erreichbar ist. *(mündlich, optional)*

Aufgabe 25

mündlich, optional

Ein Graph G heißt *selbstkomplementär*, wenn er zu seinem *Komplementärgraphen* \overline{G} isomorph ist. (\overline{G} hat dieselbe Knotenmenge wie G und es werden genau die Knoten $x \neq y$ durch eine Kante verbunden, die in G nicht verbunden sind.)

- (a) Zeigen Sie, dass ein selbstkomplementärer Graph zusammenhängend ist.
(b) Wieviele nichtisomorphe selbstkomplementäre Graphen mit ≤ 7 Knoten gibt es?
(c) Finden Sie mindestens einen solchen Graphen mit 8 Knoten.

Aufgabe 26

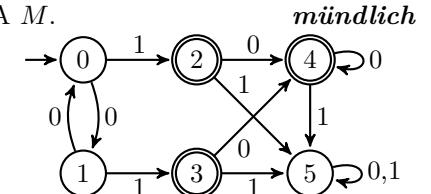
6 Punkte

Seien E_1 und E_2 Äquivalenzrelationen auf einer Menge A . Sind dann auch $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$, $E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben jeweils erhalten, welche nicht? Begründen Sie.

Aufgabe 27

Gegeben sei nebenstehender DFA M .

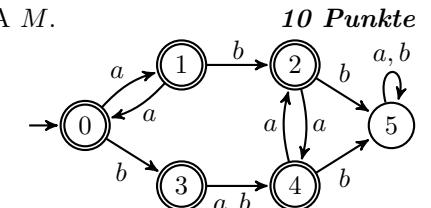
- Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
- Bestimmen Sie den Index der Äquivalenzrelation $R_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $R_{L(M)}$ an.



Aufgabe 28

Gegeben sei nebenstehender DFA M .

- Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
- Bestimmen Sie den Index der Äquivalenzrelation $R_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $R_{L(M)}$ an.



Aufgabe 29

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $k \geq 1$.

- (a) Bestimmen Sie einen Minimal-DFA für die Sprache

$$L_k = \{x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid n \geq k, x_k = 1\}.$$

- (b) Geben Sie einen NFA für die gespiegelte Sprache $L' = L_k^R$ mit höchstens $k+1$ Zuständen an.
(c) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA für L' .
*(d) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen NFA N mit k Zuständen an, so dass jeder DFA für $L(N)$ mindestens 2^k Zustände hat. *(optional)*

Aufgabe 30

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei

$$D_i = \begin{cases} \{\{p, q\} \mid q \in E, p \notin E\}, & i = 0 \\ D_{i-1} \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D_{i-1}\}, & i > 0 \end{cases}$$

die in der Vorlesung zur Minimierung von M benutzte Folge.

- (a) Zeigen Sie, dass $D_i = \{\{p, q\} \mid \exists x \in \Sigma^{\leq i} : x \in L_q \Delta L_p\}$ ist. Dabei enthält $\Sigma^{\leq n}$ alle Wörter in Σ^* der Länge höchstens n . *(mündlich)*
(b) Zeigen Sie, dass $D_j = D_{j+1}$ die Gleichheit $D_j = \{\{p, q\} \subseteq Z \mid q \not\sim p\}$ impliziert. *(4 Punkte)*
(c) Schätzen Sie die Anzahl $\min\{j \geq 0 \mid D_j = D_{j+1}\}$ der benötigten Iterationen in Abhängigkeit von der Anzahl $m = \|Z\|$ der Zustände von M möglichst gut nach oben ab. *(4 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass $E_i = \{(p, q) \in Z^2 \mid \{p, q\} \notin D_i\}$ für jedes $i \geq 0$ eine Äquivalenzrelation auf Z ist.

Aufgabe 31

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

- Geben Sie einen Minimal-DFA M für die Sprache der Wörter über Σ an, die bbb nicht als Teilwort enthalten. Beweisen Sie die Korrektheit und die Minimalität von M .