

## Übungsblatt 13

**Aufgabe 65** Zeigen Sie:

- (a)  $P_{\parallel}^{\text{SAT}[k]} \subseteq P_{\parallel}^{\text{SAT}[2^k-1]}$ ,
- (b)  $P_{\parallel}^{\text{SAT}[2^k-1]} \subseteq P^{\text{SAT}[k+1]}$ ,
- (c)  $P_{\parallel}^{\text{SAT}[2^k-1]} = P^{\text{SAT}[k]}$ ,
- (d)  $P_{\parallel}^{\text{NP}} = P^{\text{NP}[\mathcal{O}(\log n)]}$ ,
- (e)  $\text{FP}_{\parallel}^{\text{NP}} = \text{FP}^{\text{NP}[\mathcal{O}(\log n)]} \Rightarrow \text{NP} = \text{RP}$ .

**Aufgabe 66**

Sei  $\text{GapP}$  der Abschluss von  $\#\text{P}$  unter Subtraktion. Weiter sei  $\text{SPP}$  die Klasse aller Sprachen, deren charakteristische Funktion in  $\text{GapP}$  berechenbar ist. Zeigen Sie:

- (a) Eine Funktion  $g$  liegt genau dann in  $\text{GapP}$ , wenn es eine NPTM  $N$  mit  $g(x) = acc_N(x) - rej_N(x)$  gibt, wobei  $acc_N(x)$  ( $rej_N(x)$ ) die Anzahl der akzeptierenden (verwerfenden) Berechnungen von  $N(x)$  bezeichnet.
- (b)  $\text{GapP}$  besitzt alle in der Vorlesung für  $\#\text{P}$  bewiesenen Abschlusseigenschaften.
- (c) Eine Sprache  $A$  liegt genau dann in  $\text{PP}$ , wenn es eine Funktion  $g \in \text{GapP}$  gibt mit  $x \in A \Leftrightarrow g(x) > 0$ .
- (d) Eine Sprache  $A$  liegt genau dann in  $\oplus\text{P}$ , wenn es eine Funktion  $g \in \text{GapP}$  gibt mit  $A(x) \equiv_2 g(x)$ .
- (e)  $GA \in \text{SPP}$ . (Bemerkung: GI liegt ebenfalls in  $\text{SPP}$ .)

*mündlich*

- (f)  $\text{SPP}$  ist low für  $\text{GapP}$ ,  $\text{PP}$ ,  $\oplus\text{P}$  und  $\text{SPP}$ , d.h.  $\text{GapP}^{\text{SPP}} = \text{GapP}$ ,  $\text{PP}^{\text{SPP}} = \text{PP}$ ,  $\oplus\text{P}^{\text{SPP}} = \oplus\text{P}$  und  $\text{SPP}^{\text{SPP}} = \text{SPP}$ .
- (g) Eine Sprache  $A$  ist genau dann low für  $\text{GapP}$ , wenn  $A$  in  $\text{SPP}$  liegt, d.h.  $\text{SPP} = \{A \mid \text{GapP}^A = \text{GapP}\}$ .

**Aufgabe 67**

*mündlich*

Sei  $\#\text{CLIQUE}$  die Funktion, die für einen geg. Graphen die Anzahl aller Cliquen (beliebiger Größe) in  $G$  bestimmt.  $\#\text{IS}$  sei analog definiert. Zeigen Sie, dass  $\#3\text{-SAT} \leq^{\text{FP}[1]} \#\text{CLIQUE} \equiv_{\text{par}} \#\text{IS} \leq^{\text{FP}[1]} \#2\text{-SAT}$  gilt.

**Aufgabe 68**

*mündlich*

Sei  $\text{GapL}$  der Abschluss von  $\#\text{L}$  unter Subtraktion. Zeigen Sie:

- (a) Das Problem, für einen azyklischen Graphen  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten die Differenz der Anzahl der Pfade von 1 nach  $n$  und der Anzahl der Pfade von 1 nach  $n-1$  zu bestimmen ist  $\text{GapL}$ -vollständig unter logspace parsimonious Reduktionen  $\leq_{\text{par}}^{\log}$ .
- (b) Die Funktion  $det$  ist  $\text{GapL}$ -hart unter  $\leq_{\text{par}}^{\log}$ .
- (c) Die Funktion  $det$  ist  $\text{GapL}$ -vollständig unter  $\leq_{\text{par}}^{\log}$ .