Übungsblatt 12

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 5. Februar 2013

Aufgabe 60 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Falls C unter $\leq_{disj}^{log}$ abgeschossen ist, dann auch $\oplus \cdot \mathsf{C}$.
(b) $\exists \mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \mathsf{PH} = \mathsf{NL}$.
(c) $\oplus\mathsf{P}^{\mathsf{PH}} \subseteq \mathsf{BPP}^{\oplus\mathsf{P}} \subseteq \oplus\mathsf{P}/\mathrm{poly}$,
(d) $\mathsf{PP}^{\mathsf{PH}} \subseteq \mathsf{P}^{\mathsf{PP}}$.

Aufgabe 61 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\mathrm{GA} \in \oplus\mathsf{P}$.
(b) Das Primzahlproblem liegt in $\oplus\mathsf{P}$. (*Hinweis:* Überlegen Sie, auf wie viele Arten sich eine Zahl n in geeignete Faktoren zerlegen lässt.)
(c) $\mathsf{BPL} \subseteq \mathsf{PL} \subseteq \mathsf{P}$ und $\oplus\mathsf{L} \subseteq \mathsf{P}$. (*Bemerkung:* $\oplus\mathsf{L}$, BPL und PL sind definiert wie $\oplus\mathsf{P}$, BPP und PP, nur dass anstelle der polynomiellen Zeitschranke eine logarithmische Platzschranke auferlegt wird.)

Aufgabe 62 ***mündlich***

Eine **Offline-Orakelturingmaschine** (kurz **Offline-OM**) ist eine Offline-TM mit einem zusätzlichen write-only Orakelband. Der Platzverbrauch einer Offline-OM M ist genauso definiert wie bei einer Offline-TM, wobei das Orakelband unberücksichtigt bleibt. Sei $L = L(M^A)$ die von einer $s(n)$-platzbeschränkten Offline-OM M mit Orakel A erkannte Sprache. Wir sagen, M **stellt ihre Fragen deterministisch** und schreiben $L = L(M^{d(A)})$, wenn jede Teilrechnung von M beginnend mit der Ausgabe des jeweils ersten Zeichens auf dem Orakelband bis zum Übergang in den Fragezustand deterministisch ist. Falls M auch unter Einbeziehung des Orakelbands $f(n)$-platzbeschränkt ist, nennen wir M **streng $f(n)$-platzbeschränkt** und schreiben $L = L(M^{s(A)})$. Entsprechend erhalten wir die relativierten Klassen $\mathsf{DSPACE}^A(f(n))$, $\mathsf{DSPACE}^{d(A)}(f(n))$ und $\mathsf{DSPACE}^{s(A)}(f(n))$, sowie $\mathsf{NSPACE}^A(f(n))$, $\mathsf{NSPACE}^{d(A)}(f(n))$ und $\mathsf{NSPACE}^{s(A)}(f(n))$. Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{DSPACE}^{d(A)}(f(n)) = \mathsf{DSPACE}^A(f(n))$.
(b) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{NL}^A \not\subseteq \mathsf{P}^A$.
(c) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{NL}^B \not\subseteq \mathsf{DSPACE}^B(\log^2(n))$.
(d) Es gibt ein Orakel C mit $\mathsf{NL}^C \neq \text{co-}\mathsf{NL}^C$.
(e) Es gibt ein Orakel D mit $D \notin \mathsf{NL}^{s(D)}$.
(f) Es gilt $\mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{d(A)} = \mathsf{NL}^{d(A)} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{s(A)} = \mathsf{NL}^{s(A)}$.

Aufgabe 63 ***mündlich***

Für einen bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ sei X_G die $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen $a_{ij}x_{ij}$, wobei $a_{ij} = 1$ ist, falls $\{u_i, w_j\} \in E$ gilt, und $a_{ij} = 0$ sonst. Zeigen Sie:

(a) Die Determinante $det(X_G)$ von X_G ist ein Polynom $p(x_{11}, \ldots, x_{nn})$ über den n^2 Variablen x_{ij} vom Gesamtgrad höchstens n.
(b) G hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $det(X_G) \neq 0$ ist.
(c) Falls $p(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens d ist, so gilt für unabhängig und zufällig gewählte Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}_q$, q prim, $p(a_1, \ldots, a_m) \not\equiv_q 0$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - d/q$.

    Hinweis: Benutzen Sie Induktion über m und stellen Sie $p(x_1, \ldots, x_m)$ im Induktionsschritt in der Form $\sum_{i=0}^{d} p_i(x_1, \ldots, x_{m-1})x_m^i$ dar.
(d) Geben Sie einen effizienten probabilistischen Algorithmus an, der testet, ob G ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 64 ***10 Punkte***

Konstruieren Sie ein Orakel B mit $\mathsf{NP}^B \neq \text{co-}\mathsf{NP}^B$.