Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. Januar 2013

Aufgabe 49 ***mündlich***

Eine k-**Färbung** von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c \colon V \to \{1, \dots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne ColGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

(a) ColGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt ColGI $\equiv_m^{log}$ GI.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 50 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ additiv ist: $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$.

Aufgabe 51 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\#\mathsf{P} \subseteq \mathsf{FP}(\mathsf{PP})$,

(b) $\oplus\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{PP})$,

(c) $\oplus\mathsf{P}(\oplus\mathsf{P}) = \oplus \cdot \oplus \cdot \mathsf{P} = \oplus\mathsf{P}$,

(d) $\mathsf{BPP}(\mathsf{BPP}) = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{BP} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{BPP}$,

(e) $\mathsf{PP}(\mathsf{BPP}) = \mathsf{P} \cdot \mathsf{BP} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{PP}$.

Aufgabe 52 ***mündlich***

Eine Funktion g heißt *parsimonious reduzierbar* auf eine Funktion h (kurz $g \leq_{par} h^p$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Probleme unter parsimonious Reduktionen äquivalent sind: #GI, #ColGI und #DirGI.

(b) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln (mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$) definierte Funktion vollständig für $\#\mathsf{P}$ unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#\text{Sat} : F(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|\{a \in \{0,1\}^n \mid F(a) = 1\}\|$$

(c) Folgern Sie, dass $\oplus$Sat $\oplus\mathsf{P}$-vollständig ist.

(d) Zeigen Sie, dass Teil (b) für jede vollständige Basis von Junktoren (wie z. B. $\{\wedge, \neg\}$, $\{\to, 0\}$ oder $\{\wedge, \oplus, 1\}$) gilt.

Aufgabe 53 ***10 Punkte***

Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \to \Sigma^*$ heißt *und-Funktion* (kurz $\wedge_2$-*Funktion*) für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x\#y) \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* (kurz $\vee_2$-*Funktion*) ist analog definiert. Sei C eine unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein C-vollständiges Problem. Zeigen Sie:

(a) C ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn A eine $\wedge_2$-Funktion in FL hat.

(b) Sat und GI haben und- und oder-Funktionen in FL.

(c) GA hat eine oder-Funktion in FL.

(d) NP, $\mathsf{co\text{-}NP}$ und $\mathsf{NP} \cap \mathsf{co\text{-}NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.

(e) $\mathsf{NP} \cup \mathsf{co\text{-}NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$ ist.