Einführung in die Komplexitätstheorie — WS 2012/13
Prof. Johannes Köbler — 4. Dezember 2012

Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Januar 2013

Aufgabe 40 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) MajSat ist PP-vollständig und es gilt $\mathsf{PP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

(b) PSPACE ist unter allen Operatoren $O \in \{\exists, \forall, \mathsf{R}, \mathsf{BP}, \mathsf{P}, \oplus\}$ abgeschlossen.

(c) PH ist die kleinste Klasse, die P enthält und unter dem $\exists$-Operator und dem $\forall$-Operator abgeschlossen ist.

(d) $\mathsf{PH} \neq \mathsf{PSPACE}$, außer wenn PH kollabiert.

(e) Alle Stufen der Polynomialzeithierarchie sind unter majority-Reduktionen abgeschlossen.

(f) Nicht jede von einer PM in erwarteter Laufzeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ akzeptierte Sprache liegt in PP.

Aufgabe 41 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ die Gleichheit $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$ folgt. (*Hinweis:* Benutzen Sie einen BPP-Algorithmus für Sat, um für eine gegebene Formel $F \in$ Sat mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung zu finden.)

Aufgabe 42 ***mündlich***

Sei $\rho \in [0, 1]$ eine reelle Zahl. Eine ρ-PM ist eine PM mit maximalem Verzweigungsgrad 2, die eine ρ-Münze benutzt: Hat eine Konfiguration K zwei Folgekonfigurationen K' und K'', so gilt $\Pr[K \to_M K'] = \rho$ und $\Pr[K \to_M K''] = 1 - \rho$. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PMs durch ρ-PMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ, BPP_ρ, RP_ρ und ZPP_ρ. Zeigen Sie:

(a) Für $\rho \in \{0, 1\}$ gilt $\mathsf{PP}_\rho = \mathsf{BPP}_\rho = \mathsf{RP}_\rho = \mathsf{ZPP}_\rho = \mathsf{P}$.

(b) Für $\rho \in (0, 1)$ kann jede PM M durch eine ρ-PM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden.

(c) Jede ρ-PM M kann durch eine PM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n-te Bit b_n der Binärrepresentation $0.b_1 b_2 \ldots$ von ρ ist in Zeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ berechenbar).

(d) Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0, 1)$ gilt $\mathsf{BPP} = \mathsf{BPP}_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).

(e) Es gibt Zahlen $\rho \in (0, 1)$ mit $\mathsf{PP} \neq \mathsf{PP}_\rho$ (sogar $\mathsf{PP}_\rho \not\subseteq \mathsf{RE}$).

Aufgabe 43 ***10 Punkte***

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus.

Algorithmus: `RandomWalk`

```
Input: KNF-Formel F(x_1, ..., x_n), n ≥ 1, ohne Einerklauseln
  wähle eine beliebige Belegung a für F
  while F(a) = 0 do
    wähle eine beliebige Klausel C von F mit C(a) = 0
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von a(l)
Output: a
```

Sei F eine 2-KNF-Formel (o.B.d.A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung, die F erfüllt. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von RandomWalk(F) polynomiell beschränkt ist.

Hinweis: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die erwartete Anzahl $t(i)$ von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in genau i Variablen von h abweicht:

1. $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$,
2. $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$ für $i = 1, \ldots, n-1$,
3. $t(i) \leq i(2n - i)$ für $i = 0, \ldots, n$.