Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2011/12

Relationalstrukturen

Definition

- Sei A eine nichtleere Menge, R ist eine k-stellige Relation auf A, wenn $R \subseteq A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k\text{-mal}}$ ist.
- Für $i = 1, \ldots, n$ sei R_i eine k_i-stellige Relation auf A. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ Relationalstruktur.
- Die Menge A heißt der Individuenbereich, die Trägermenge oder die Grundmenge der Relationalstruktur.

Bemerkung

- Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten.
- Man nennt dann R eine (binäre) Relation auf A.
- Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die Infix-Schreibweise aRb benutzt.

Relationalstrukturen

Beispiel

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und
$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\},$$
- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner }\}$ und
$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\},$$
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei M eine beliebige Menge und $\subseteq$ die Inklusionsrelation auf den Teilmengen von M ist,
- (A, Id_A) mit $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (die Identität auf A),
- $(\mathbb{R}, \leq)$,
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet.

◁

Mengentheoretische Operationen auf Relationen

- Da Relationen Mengen sind, können wir den Durchschnitt, die Vereinigung, die Differenz und das Komplement von Relationen bilden:

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A. Dann sind der Schnitt über $\mathcal{M}$ und die Vereinigung über $\mathcal{M}$ folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Weitere Operationen auf Relationen

Definition

- Die transponierte (konverse) Relation zu R ist
$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$
- R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet.
- Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.
- Das Produkt (oder die Komposition) zweier Relationen R und S ist
$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. $\triangleleft$

Das Relationenprodukt

Notation

- Für $R \circ S$ wird auch $R\,;S$, $R \cdot S$ oder einfach RS geschrieben.
- Für $\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{\text{n-mal}}$ schreiben wir auch R^n. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht!

Das Relationenprodukt R^n sollte nicht mit dem kartesischen Produkt

$$\underbrace{R \times \cdots \times R}_{\text{n-mal}}$$

verwechselt werden.

Vereinbarung

Wir vereinbaren, dass R^n das n-fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Sei R eine Relation auf A. Dann heißt R

reflexiv,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Eigenschaften von Relationen

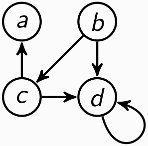
Beispiel

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist auch konnex.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist zwar im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex. $\triangleleft$

Darstellung von endlichen Relationen

Graphische Darstellung

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$



- Eine Relation R auf einer (endlichen) Menge A kann durch einen gerichteten Graphen (kurz Digraphen) $G = (A, R)$ mit Knotenmenge A und Kantenmenge R veranschaulicht werden.
- Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil).
- Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent oder benachbart.

Darstellung von endlichen Relationen

Definition

Sei R eine binäre Relation auf A.

- Die Menge der Nachfolger bzw. Vorgänger von x ist

$$R[x] = \{y \in A \mid xRy\} \text{ bzw. } R^{-1}[x] = \{y \in A \mid yRx\}.$$

- Der Ausgangsgrad eines Knotens x ist $\deg^{+}(x) = \|R[x]\|$.
- Der Eingangsgrad von x ist $\deg^{-}(x) = \|R^{-1}[x]\|$.
- Ist R symmetrisch, so können wir die Pfeilspitzen auch weglassen.
- In diesem Fall heißt $\deg(x) = \deg^{-}(x) = \deg^{+}(x)$ der Grad von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ die Nachbarschaft von x in G.
- G ist schleifenfrei, falls R irreflexiv ist.
- Ist R irreflexiv und symmetrisch, so nennen wir $G = (A, R)$ einen (ungerichteten) Graphen.

Darstellung von endlichen Relationen

Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ lässt sich auch durch die boolesche $(n \times n)$-Matrix $M_R = (m_{ij})$ darstellen mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ hat beispielsweise die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁

Darstellung von endlichen Relationen

Tabellendarstellung (Adjazenzliste)

R lässt sich auch durch eine Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolger in Form einer Liste zuordnet.

Beispiel

Die Relation $R = \{(b,c),(b,d),(c,a),(c,d),(d,d)\}$ auf $A = \{a,b,c,d\}$ hat beispielsweise die Tabellendarstellung

x	$R[x]$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

$\triangleleft$

Berechnung des Relationenprodukts

Berechnung von $R \circ S$

- Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$-Matrizen für R und S, so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1,\dots,n} (r_{ik} \wedge s_{kj}).$$

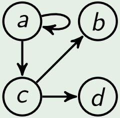
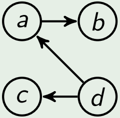
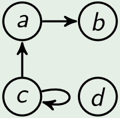
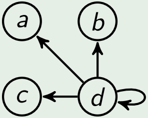
- Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Das Relationenprodukt

Beispiel

Betrachte die Relationen $R = \{(a,a),(a,c),(c,b),(c,d)\}$ und $S = \{(a,b),(d,a),(d,c)\}$ auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenz-matrix	$\begin{matrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{matrix}$
Adjazenz-liste	a : a, c b : - c : b, d d : -	a : b b : - c : - d : a, c	a : b b : - c : a, c d : -	a : - b : - c : - d : a, b, c, d

◁

Das Relationenprodukt

Beobachtung

Das Relationenprodukt ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Relationenalgebra

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationenprodukt $\circ$ als binärer Operation und der Relation Id_A als neutralem Element eine Halbgruppe (oder Monoid) bildet.

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt

1. $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. $\circ$ ist assoziativ,
2. $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Relationenalgebra

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt

1. $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. $\circ$ ist assoziativ,
2. $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Beweis.

1. $$\begin{aligned} x\,(Q \circ R) \circ S\,y &\Leftrightarrow \exists u : x\,(Q \circ R)\,u \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u : (\exists v : x\,Q\,v\,R\,u) \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v : x\,Q\,v\,R\,u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists v : x\,Q\,v \;\wedge\; (\exists u : v\,R\,u \;\wedge\; u\,S\,y) \\ &\Leftrightarrow \exists v : x\,Q\,v\,(R \circ S)\,y \\ &\Leftrightarrow x\,Q \circ (R \circ S)\,y \end{aligned}$$
2. Wegen $x\,Id \circ R\,y \Leftrightarrow \exists z : x = z \;\wedge\; z\,R\,y \Leftrightarrow x\,R\,y$ folgt $Id \circ R = R$. Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog. $\square$

Überblick über Relationalstrukturen

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

Bemerkung

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Ordnungsrelationen

Definition

(A, R) heißt Ordnung (auch Halbordnung oder partielle Ordnung), wenn R eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$, sind Ordnungen. $(\mathbb{Z}, |)$ ist keine Ordnung.
- Ist R eine Ordnung auf A und $B \subseteq A$, so ist die Einschränkung $R_B = R \cap (B \times B)$ von R auf B eine Ordnung auf B.
- Beispielsweise ist $(\mathbb{N}, |)$ die Einschränkung von $(\mathbb{Z}, |)$ auf $\mathbb{N}$. $\triangleleft$

Darstellung einer Ordnung durch ein Hasse-Diagramm

- Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \setminus Id_A$, d.h.

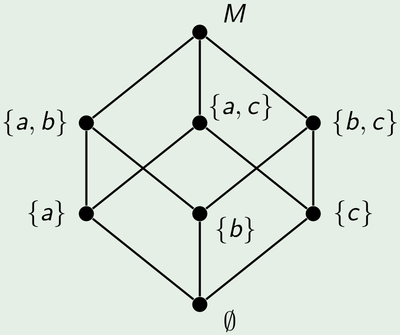
$$x < y \;\Leftrightarrow\; x \leq y \wedge x \neq y$$

- Ein Element $x \in A$ heißt unterer Nachbar von y (kurz: $x \lessdot y$), falls $x < y$ gilt und kein $z \in A$ existiert mit $x < z < y$.
- $\lessdot$ ist also die Relation $< \setminus <^2$.
- Um die Ordnung $(A, \leq)$ in einem Hasse-Diagramm darzustellen, wird nur der Digraph der Relation $(A, \lessdot)$ gezeichnet.
- Weiterhin wird im Fall $x \lessdot y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf die Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Das Hasse-Diagramm für $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$

Beispiel

Die Inklusion $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ mit $M = \{a, b, c\}$ lässt sich durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:

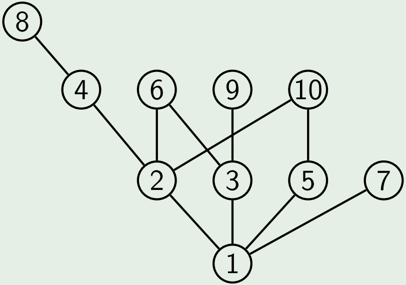


$\triangleleft$

Das Hasse-Diagramm der "teilt"-Relation

Beispiel

Die Einschränkung der "teilt"-Relation auf die Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:



◁

Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente

Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei b ein Element in einer Teilmenge $B \subseteq A$.

- b heißt kleinstes Element oder Minimum von B, falls gilt:
$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$
- b heißt größtes Element oder Maximum von B, falls gilt:
$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$
- b heißt minimal in B, falls es in B kein kleineres Element gibt:
$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$
- b heißt maximal in B, falls es in B kein größeres Element gibt:
$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

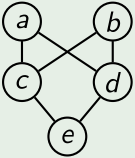
Bemerkung

Wegen der Antisymmetrie kann es in B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben.

Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente

Beispiel

Betrachte folgende Ordnung.



B	minimal in B	maximal in B	Minimum von B	Maximum von B
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a

Obere und untere Schranken

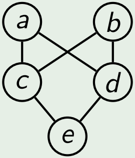
Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Jedes Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt untere Schranke von B.
- Jedes Element $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt obere Schranke von B.
- B heißt nach oben beschränkt, wenn B eine obere Schranke hat.
- B heißt nach unten beschränkt, wenn B eine untere Schranke hat.
- B heißt beschränkt, wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.

Obere und untere Schranken

Beispiel (Fortsetzung)



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a

Infima und Suprema

Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Besitzt B eine größte untere Schranke i, d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i, so heißt i das Infimum von B ($i = \inf B$):

  $$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- Besitzt B eine kleinste obere Schranke s, d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s, so heißt s das Supremum von B ($s = \sup B$):

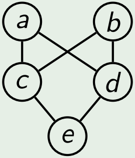
  $$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Bemerkung

B kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum haben.

Infima und Suprema

Beispiel (Schluss)



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken	inf	sup
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

Infima und Suprema

Bemerkung

- Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen.
- So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$
weder ein Supremum noch ein Infimum.
- Dagegen hat in einer linearen Ordnung jede endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.

Äquivalenzrelationen

Definition

(A, R) heißt Äquivalenzrelation, wenn R eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie".
- Auf $\mathbb{Z}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m". $\triangleleft$

Äquivalenzrelationen

- Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die von x repräsentierte Äquivalenzklasse und bezeichnet sie auch mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$:

$$[x]_E = [x] = \{x' \mid xEx'\}.$$

- Wie wir sehen werden, bilden die Äquivalenzklassen eine Zerlegung (Partition) von A, d.h. je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt und ihre Vereinigung ergibt A.
- Die Zerlegung von A in Äquivalenzklassen wird Quotienten- oder Faktormenge von A bzgl. E genannt und mit A/E bezeichnet:

$$A/E = \{[x]_E \mid x \in A\}.$$

- Die Anzahl $\|A/E\|$ der Äquivalenzklassen von E wird auch als der Index von E bezeichnet.
- Eine Menge $S \subseteq A$ heißt Repräsentantensystem, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die weiter oben betrachteten Äquivalenzrelationen erhalten wir folgende Klasseneinteilungen:

- Für die Parallelität auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$:
  alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bilden jeweils eine Äquivalenzklasse.
- Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.
- Für die Relation "im gleichen Jahr geboren wie" auf der Menge aller Menschen: jeder Jahrgang bildet eine Äquivalenzklasse.
- Für die Relation "gleicher Rest bei Division durch m" auf $\mathbb{Z}$:
  jede der m Restklassen $[0], [1], \ldots, [m-1]$ mit

  $$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod m = r\}$$

  bildet eine Äquivalenzklasse.
- Repräsentantensystem: $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. $\triangleleft$

Verfeinerung und Vergröberung von Äquivalenzrelationen

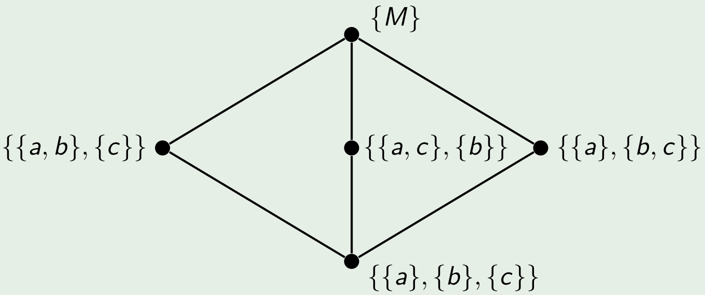
Bemerkungen

- Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die Identität Id_A, die größte ist die Allrelation $A \times A$.
- Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$.
- Die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich A, d.h. $A/(A \times A) = \{A\}$.
- Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten.
- Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E.
- Im Fall $E \subseteq E'$ sagt man auch, E bewirkt eine feinere Zerlegung von A als E'.
- Demnach ist die Identität die feinste und die Allrelation die gröbste Äquivalenzrelation.

Das Hasse-Diagramm der Feiner-Relation

Beispiel

Die "feiner als" Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:



◁

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
3. E ist reflexiv und $\{E[x] \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

1 impliziert 2: Sei E eine Äquivalenzrelation auf A.
Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E[y] \subseteq E[x]$:

$$z \in E[y] \Rightarrow yEz \Rightarrow xEz \Rightarrow z \in E[x].$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E[x] \subseteq E[y]$.

Umgekehrt folgt aus $E[x] = E[y]$ wegen der Reflexivität von E, dass $y \in E[y] = E[x]$ enthalten ist, und somit xEy.

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
3. E ist reflexiv und $\{E[x] \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

2 impliziert 3: Falls E die Bedingung $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$ erfüllt, so folgt sofort xEx (wegen $E[x] = E[x]$) und folglich überdecken die Mengen $E[x]$ (wegen $x \in E[x]$) die Menge A.

Ist $E[x] \cap E[y] \neq \emptyset$ und z ein Element in $E[x] \cap E[y]$, so gilt xEz und yEz und daher folgt $E[x] = E[z] = E[y]$.

Da also je zwei Mengen $E[x]$ und $E[y]$ entweder gleich oder disjunkt sind, bildet $\{E[x] \mid x \in A\}$ sogar eine Partition von A.

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
3. E ist reflexiv und $\{E[x] \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

3 impliziert 1: Wird schließlich A von den Mengen $E[x]$ partitioniert, wobei $x \in E[x]$ für alle $x \in A$ gilt, so folgt

$$xEy \Leftrightarrow y \in E[x] \cap E[y] \Leftrightarrow E[x] = E[y].$$

Daher übertragen sich die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität unmittelbar von der Gleichheitsrelation auf E. $\square$

Hüllenoperatoren

Bemerkung

- Es ist leicht zu sehen, dass der Schnitt von transitiven Relationen wieder transitiv ist.
- Die transitive Hülle von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- R^+ ist also eine transitive Relation, die R enthält.
- Da R^+ zudem in jeder Relation mit diesen Eigenschaften enthalten ist, ist R^+ die kleinste transitive Relation, die R enthält.
- Da auch die Reflexivität und die Symmetrie bei der Schnittbildung erhalten bleiben, lassen sich nach demselben Muster weitere Hüllen-operatoren definieren.

Weitere Hüllenoperatoren

Definition

Sei R eine Relation auf A.

- Die reflexive Hülle von R ist
$$h_{\mathrm{refl}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$
- Die symmetrische Hülle von R ist
$$h_{\mathrm{sym}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$
- Die reflexiv-transitive Hülle von R ist
$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$
- Die Äquivalenzhülle von R ist
$$h_{\mathrm{äq}}(R) = \bigcap \{E \subseteq A \times A \mid E \text{ ist eine Äquivalenzrelation mit } R \subseteq E\}.$$

Transitive und reflexive Hülle

Satz

$h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A, \;\; h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T, \;\; R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n, \;\; R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$

Beweis

Siehe Übungen. $\square$

Bemerkung

- Ein Paar (a, b) ist also genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R enthalten, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$.
- Dies bedeutet, dass es Elemente $x_0, \ldots, x_n \in A$ gibt mit

$$x_0 = a, \; x_n = b \;\text{ und }\; x_0 R x_1 R x_2 \cdots x_{n-1} R x_n.$$

- $x_0, \ldots, x_n$ heißt Weg der Länge n von a nach b.

Abbildungen

Definition

Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M.

- R heißt rechtseindeutig, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- R heißt linkseindeutig, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- Der Nachbereich $N(R)$ und der Vorbereich $V(R)$ von R sind

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R[x] \text{ und } V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T[x].$$

Abbildungen

Abbildungen ordnen jedem Element ihres Definitionsbereichs genau ein Element zu.

Definition

Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt Abbildung oder Funktion von A nach B (kurz $R : A \to B$).

Bemerkung

- Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben $f, g, h, \ldots$ bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.
- Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der Definitionsbereich und die Menge B der Wertebereich oder Wertevorrat von f genannt.
- Der Nachbereich $N(f)$ wird als Bild von f bezeichnet.

Abbildungen

Definition

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Im Fall $N(f) = B$ heißt f surjektiv.
- Ist f linkseindeutig, so heißt f injektiv.
- In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.
- Eine injektive und surjektive Abbildung heißt bijektiv.
- Ist f injektiv, so ist auch f^{-1} eine Abbildung, die als die zu f inverse Abbildung bezeichnet wird.

Bemerkung

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

Homomorphismen

Definition

Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.

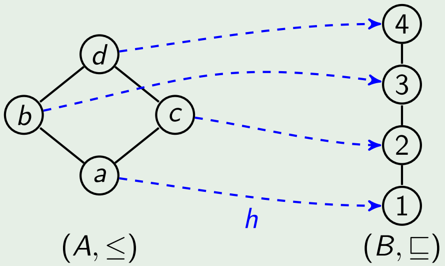
- Eine Abbildung $h : A_1 \to A_2$ heißt Homomorphismus, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1 b \Rightarrow h(a)R_2 h(b).$$

- Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man auch von Ordnungshomomorphismen oder einfach von monotonen Abbildungen.
- Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch streng monotone Abbildungen genannt.

Homomorphismen

Beispiel



- Die Abbildung $h : A \to B$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.
- Die Umkehrabbildung h^{-1} ist jedoch kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist.
- Es gilt nämlich $2 \sqsubseteq 3$, aber $h^{-1}(2) = b \not\leq c = h^{-1}(3)$. ◁

Isomorphismen

Definition

- Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.
- Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \to A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt

  $$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

  heißt Isomorphismus.
- In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) isomorph (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) isomorph, so bedeutet dies, dass sich die eine Struktur aus der anderen durch eine bloße Umbenennung der Elemente gewinnen lässt.

Isomorphismen

Beispiel

- Die Bijektion $h : x \mapsto e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}^+, \leq)$.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

  $$T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

  und

  $$P_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ist Primteiler von } n\}.$$

  Dann ist die Abbildung

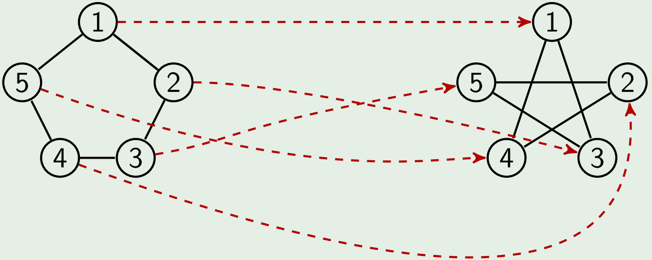
  $$h : k \mapsto P_k$$

  ein Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$.

  h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt). ◁

Isomorphismen

Beispiel



$G = (V, E)$

v	1 2 3 4 5
$h_1(v)$	1 3 5 2 4
$h_2(v)$	1 4 2 5 3

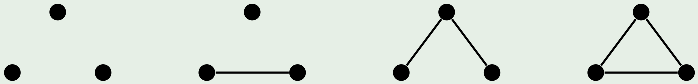
$G' = (V, E')$

- Die beiden Graphen G und G' sind isomorph.
- Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2. ◁

Isomorphismen

Beispiel

- Während auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3\}$ insgesamt $2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:

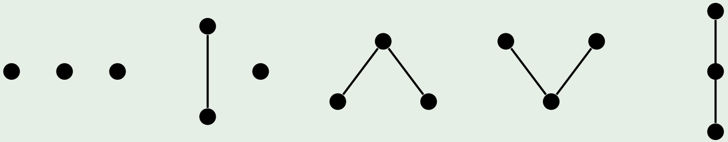


$\triangleleft$

Isomorphismen

Beispiel

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



- Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Isomorphierelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden. $\triangleleft$