Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2011/12

Kontextfreie Sprachen

Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist folgende Sprache nicht regulär:

  $$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

- Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

  $$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S).$$

- Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist:

  $$\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{CFL}.$$

- Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

  $$\mathrm{CFL} \subsetneq \mathrm{CSL}.$$

Kontextfreie Sprachen sind auch kontextsensitiv

- Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \to \alpha$ haben.
- Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε-Regeln der Form $A \to \varepsilon$ zu.
- Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε-Regel $S \to \varepsilon$ haben.
- Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.
- Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv.
- Wir werden jedoch sehen, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextsensitive Grammatik konstruieren lässt.

Entfernen von ε-Regeln

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Zuerst berechnen wir die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller *ε-ableitbaren* Variablen:

  $E' := \{A \in V \mid A \to \varepsilon\}$
  repeat
      $E := E'$
      $E' := E \cup \{A \in V \mid \exists B_1, \ldots, B_k \in E : A \to B_1 \cdots B_k\}$
  until $E = E'$

- Nun bilden wir P' wie folgt:

$$\left\{ A \to \alpha' \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es ex. eine Regel } A \to_G \alpha \text{, so dass } \alpha' \neq \varepsilon \text{ aus } \alpha \text{ durch} \\ \text{Entfernen von beliebig vielen Variablen } A \in E \text{ entsteht} \end{array} \right\}.$$

$\square$

Entfernen von ε-Regeln

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, T, U, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$\begin{array}{llll} P: & S \to aY, bX, Z; & Y \to bS, aYY; & T \to U; \\ & X \to aS, bXX; & Z \to \varepsilon, S, T, cZ; & U \to abc. \end{array}$$

- Berechnung von E:

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

- Entferne $Z \to \varepsilon$ und füge $X \to a$ (wegen $X \to aS$), $Y \to b$ (wegen $Y \to bS$) und $Z \to c$ (wegen $Z \to cZ$) hinzu:

$$\begin{array}{llll} P': & S \to aY, bX, Z; & Y \to b, bS, aYY; & T \to U; \\ & X \to a, aS, bXX; & Z \to c, S, T, cZ; & U \to abc. \end{array}$$

◁

Die Chomsky-Hierarchie

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Korollar

REG $\subsetneq$ CFL $\subseteq$ CSL $\subseteq$ RE.

Beweis

- Es ist nur noch die Inklusion CFL $\subseteq$ CSL zu zeigen.
- Nach obigem Satz ex. zu $L \in$ CFL eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in$ CSL.
- Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

  $$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S, \varepsilon\}, S')$$

  die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in$ CSL. $\square$

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Beweis

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und sei S eine neue Variable. Dann erzeugen die kontextfreien Grammatiken

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$,

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

das Produkt $L(G_4) = L(G_1)L(G_2)$ und

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

die Sternhülle $L(G_1)^*$. □

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Frage

Ist die Klasse CFL auch abgeschlossen unter

- Durchschnitt und
- Komplement?

Antwort

Nein.

Hierzu müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, für dessen Beweis wir Grammatiken in Chomsky-Normalform benötigen.

Chomsky-Normalform

Definition

Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.

Anwendungen der Chomsky-Normalform

- CNF-Grammatiken bilden die Basis für eine effiziente Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.
- Zudem ermöglichen sie den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Chomsky-Normalform

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε-Regeln $A \to \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \to B$ loswerden.

Definition

Regeln der Form $A \to B$ heißen Variablenumbenennungen.

Entfernen von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

  $$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1.$$

  Hierzu entfernen wir diese Regeln aus P und ersetzen alle Vorkommen der Variablen $A_2, \ldots, A_k$ in den übrigen Regeln durch A_1.
  (Sollte sich unter den entfernten Variablen $A_2, \ldots, A_k$ die Startvariable S befinden, so sei A_1 die neue Startvariable.)

Entfernen von Variablenumbenennungen

Beispiel (Fortsetzung)

$$P : S \to aY, bX, Z; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc.$$

- Entferne den Zyklus $S \to Z \to S$ und ersetze alle Vorkommen von Z durch S:

$$S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc.$$

Entfernen von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir alle Zyklen

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1.$$

- Nun werden wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen los, indem wir
    - eine Regel $A \to B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \to C$ mit B auf der linken Seite existiert,
    - diese Regel $A \to B$ aus P entfernen und
    - für jede Regel $B \to \alpha$ in P die Regel $A \to \alpha$ zu P hinzunehmen. $\square$

Entfernen von Variablenumbenennungen

Beispiel (Fortsetzung)

$$S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc.$$

- Entferne die Regel $T \to U$ und füge die Regel $T \to abc$ hinzu (wegen $U \to abc$):

$$S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to abc;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc.$$

- Entferne dann auch die Regel $S \to T$ und füge die Regel $S \to abc$ (wegen $T \to abc$) hinzu:

$$S \to abc, aY, bX, c, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to abc;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc.$$

- Da T und U nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \to abc$ und $U \to abc$ weglassen:

$$S \to abc, aY, bX, c, cS; \; Y \to b, bS, aYY; \; X \to a, aS, bXX. \quad \triangleleft$$

Entfernen von ε-Regeln und von Variablenumbenennungen

Bereits gezeigt:

Korollar

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Regeln und ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Noch zu zeigen:

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathsf{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne ε-Regeln und ohne Variablenumbenennungen für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Wir transformieren G wie folgt in eine CNF-Grammatik.
- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \to a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a, außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Ersetze jede Regel $A \to B_1 \cdots B_k$, $k \geq 3$, durch die $k-1$ Regeln

$$A \to B_1 A_1,\ A_1 \to B_2 A_2,\ \ldots,\ A_{k-3} \to B_{k-2} A_{k-2},\ A_{k-2} \to B_{k-1} B_k,$$

wobei $A_1, \ldots, A_{k-2}$ neue Variablen sind. $\square$

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die Regeln

  $$P: \; S \to abc, aY, bX, cS, c; \;\; X \to aS, bXX, a; \;\; Y \to bS, aYY, b.$$

- Ersetze a, b und c durch A, B und C (außer wenn sie alleine rechts vorkommen) und füge die Regeln $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$ hinzu:

  $$S \to ABC, AY, BX, CS, c; \;\; X \to AS, BXX, a;$$
  $$Y \to BS, AYY, b; \;\; A \to a; \; B \to b; \; C \to c.$$

- Ersetze die Regeln $S \to ABC$, $X \to BXX$ und $Y \to AYY$ durch die Regeln $S \to AS'$, $S' \to BC$, $X \to BX'$, $X' \to XX$ und $Y \to AY'$, $Y' \to YY$:

  $$S \to AS', AY, BX, CS, c; \;\; S' \to BC; \;\; X \to AS, BX', a; \;\; X' \to XX;$$
  $$Y \to BS, AY', b; \;\; Y' \to YY; \;\; A \to a; \; B \to b; \; C \to c.$$

$\triangleleft$

Links- und Rechtsableitungen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

  heißt Linksableitung von α_m (kurz $S \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 1, \ldots, m-1$.
- Rechtsableitungen $S_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.
- G heißt mehrdeutig, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Linksableitungen hat. Andernfalls heißt G eindeutig.

Leicht zu sehen:

Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in L(G) \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_L^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_R^* x$.

Ein- und mehrdeutige Grammatiken

Beispiel

- Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ ist eindeutig.
- Dies liegt daran, dass in keiner Satzform von G die Variable S von einem a gefolgt wird.
- Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $\alpha S \beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, falls das Präfix α in x von einem a gefolgt wird.
- Dagegen ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ 2 verschiedene Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab.$$

◁

Gerichtete Bäume und Wälder

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.

- Ein (gerichteter) v_0-v_k-Weg in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Seine Länge ist k.
- Ein Zyklus in G ist ein u-v-Weg der Länge $k \geq 1$ mit $u = v$.
- G heißt azyklisch, wenn es in G keinen gerichteten Zyklus gibt.
- G heißt gerichteter Wald, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.
- Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt Blatt.
- Ein Knoten $w \in V$ heißt Wurzel von G, falls alle Knoten $v \in V$ von w aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen gerichteten w-v-Weg in G).
- Ein gerichteter Wald, der eine Wurzel hat, heißt gerichteter Baum.
- In einem gerichteten Baum liegen die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel bereits eindeutig fest.
- Daher kann man bei bekannter Wurzel auf die Angabe der Kantenrichtungen verzichten. Man spricht dann auch von einem Wurzelbaum.

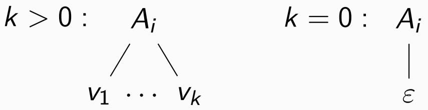
Syntaxbäume

Wir ordnen einer Ableitung

$$\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

den Syntaxbaum (oder Ableitungsbaum, engl. *parse tree*) T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \ldots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:

- T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.
- Wird im $(i+1)$-ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \to v_1 \cdots v_k$ mit $v_1, \ldots, v_k \in \Sigma \cup V$ angewandt, so ensteht T_{i+1} aus T_i, indem wir das Blatt A_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:



- Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \cdots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.
- Syntaxbäume sind also geordnete Wurzelbäume.

Syntaxbäume

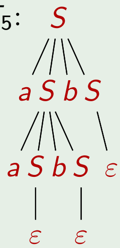
Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

T_5:



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

◁

Syntaxbäume

Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ führen insgesamt 8 Ableitungen auf den Syntaxbaum

```
        S
      / | | \
     a  S b  S
      / | | \   \
     a  S b  S   ε
        |    |
        ε    ε
```

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aaSb\underline{S}bS & \Rightarrow & aa\underline{S}bbS & \Rightarrow & aabb\underline{S} & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aaSb\underline{S}bS & \Rightarrow & aaSbb\underline{S} & \Rightarrow & aa\underline{S}bb & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aa\underline{S}bSbS & \Rightarrow & aab\underline{S}bS & \Rightarrow & aabb\underline{S} & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aa\underline{S}bSbS & \Rightarrow & aabSb\underline{S} & \Rightarrow & aab\underline{S}b & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aaSbSb\underline{S} & \Rightarrow & aa\underline{S}bSb & \Rightarrow & aab\underline{S}b & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & aaSbSb\underline{S} & \Rightarrow & aaSb\underline{S}b & \Rightarrow & aa\underline{S}bb & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & aSb\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}b & \Rightarrow & aa\underline{S}bSb & \Rightarrow & aab\underline{S}b & \Rightarrow & aabb \\
\underline{S} & \Rightarrow & aSb\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}b & \Rightarrow & aaSb\underline{S}b & \Rightarrow & aa\underline{S}bb & \Rightarrow & aabb
\end{array}
$$

◁

Syntaxbäume und Linksableitungen

- Seien $T_0, \ldots, T_m$ die zu einer Ableitung $S = \alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ gehörigen Syntaxbäume.
- Dann haben alle Syntaxbäume $T_0, \ldots, T_m$ die Wurzel S.
- Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i, indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen.
- Auf den Syntaxbaum T_m führen neben $\alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ alle Ableitungen, die sich von dieser nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden.
- Dazu gehört genau eine Linksableitung.
- Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig.
- Dasselbe gilt für Rechtsableitungen.
- Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein Binärbaum).

Welche Sprache erzeugt $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$?

- $L(G)$ enthält nur Wörter $x \in \{a, b\}^*$ mit $\#_a(x) = \#_b(x)$ $(*)$.
- Zusätzlich muss für jedes Präfix u von x gelten: $\#_a(u) \geq \#_b(u)$ $(**)$.
- Dies lässt sich durch Induktion über die Ableitungslänge l für jede aus S ableitbare Satzform $\alpha \in \{a, b, S\}^*$ zeigen.

  $l = 0$: Klar, da $\alpha = S$ beide Bedingungen erfüllt.

  $l \rightsquigarrow l + 1$: Gelte $S \Rightarrow^l \alpha \Rightarrow \beta$.

  - Falls β aus α durch Anwendung der Regel $S \rightarrow \varepsilon$ entsteht, ist dies ebenfalls klar.
  - Entsteht β aus α durch die Regel $S \rightarrow aSbS$, so folgt $\#_a(\beta) = \#_a(\alpha) + 1 = \#_b(\alpha) + 1 = \#_b(\beta)$, also $(*)$. Zudem entspricht jedem Präfix u von β ein Präfix u' von α mit $\#_a(u) - \#_b(u) \geq \#_a(u') - \#_b(u')$, wodurch sich $(**)$ von α auf β überträgt.
- Tatsächlich sind in G alle Wörter x ableitbar, die $(*, **)$ erfüllen.

Welche Sprache erzeugt $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$?

- Tatsächlich sind in G alle Wörter x ableitbar, die $(*, **)$ erfüllen.
- Dazu zeigen wir durch Induktion über n folgende Behauptung:
  Alle Wörter x der Länge $\leq n$, die $(*, **)$ erfüllen, sind in G ableitbar.

  $n = 0$: Klar, da $x = \varepsilon$ aus S ableitbar ist.

  $n \rightsquigarrow n + 1$: Sei x ein Wort der Länge $n + 1$, das $(*, **)$ erfüllt und sei u das kürzeste Präfix von x mit $\#_a(u) = \#_b(u) > 1$.

  - Dann muss u die Form $u = avb$ haben, wobei v $(*, **)$ erfüllt. Nach IV gilt daher $S \Rightarrow^* v$.
  - Zudem hat x die Form $x = uw$, wobei auch w $(*, **)$ erfüllt. Nach IV gilt daher $S \Rightarrow^* w$.
  - Nun ist x aus S wie folgt ableitbar:
    $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* avbS = uS \Rightarrow^* uw = x$.

Chomsky-Normalform

Definition

Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.

Anwendungen der Chomsky-Normalform

- CNF-Grammatiken bilden die Basis für eine effiziente Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.
- Zudem ermöglichen sie den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Abschätzung der Blätterzahl bei Binärbäumen

Definition

Die Tiefe eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Länge eines Weges von w zu einem Blatt.

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Beweis durch Induktion über k:

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $\leq k+1$.
Dann hängen an B's Wurzel maximal zwei Unterbäume.
Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV $\leq 2^k$ Blätter.
Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. $\square$

Mindesttiefe von Binärbäumen

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Korollar

Ein Binärbaum B mit mehr als 2^{k-1} Blättern hat mindestens die Tiefe k.

Beweis

Würde ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k-1$ mehr als 2^{k-1} Blätter besitzen, so stünde dies im Widerspruch zu obigem Lemma. $\square$

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Als erste Anwendung der Chomsky-Normalform beweisen wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{a^nb^n | n \geq 0\}$.
- Dann lässt sich jedes Wort $z = a^nb^n = a^{n-1}abb^{n-1}$ in L mit $|z| \geq 2$ pumpen:
  - Zerlege z in $z = uvwxy$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \varepsilon$, $x = b$, $y = b^{n-1}$.
  - Dann ist für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy = a^{n-1}a^ib^ib^{n-1} \in L$. $\triangleleft$

Beweis des Pumping-Lemmas

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \cdots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n - 1$ Regeln der Form $A \to BC$ und genau n Regeln der Form $A \to a$ angewandt.

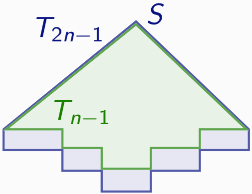
Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \cdots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

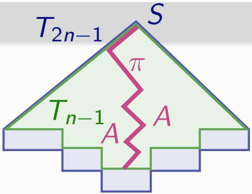
$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n - 1$ Regeln der Form $A \to BC$ und genau n Regeln der Form $A \to a$ angewandt.
- Folglich ist $m = 2n - 1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1}.
- Wir können annehmen, dass die $n - 1$ Regeln der Form $A \to BC$ vor den n Regeln der Form $A \to a$ zur Anwendung kommen.
- Dann besteht α_{n-1} aus n Variablen und T_{n-1} hat wie T_{2n-1} genau n Blätter.
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k.

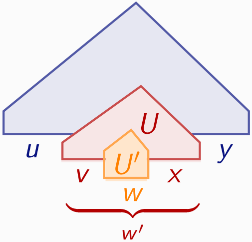


Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Fortsetzung)

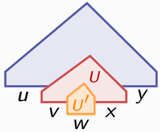


- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k.
- Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1}.
- Dann hat π mindestens die Länge k und unter den letzten $k + 1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.
- Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1}.
- Nun zerlegen wir z wie folgt:
  - w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und
  - w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird.

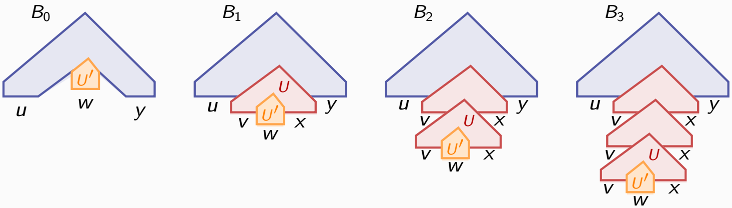


Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Schluss)



- Da U mehr Blätter hat als U', ist $vx \neq \varepsilon$ (Bed. 1).
- Da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ höchstens die Tiefe k hat (andernfalls wäre π nicht maximal), hat U^* (und damit U) höchstens $2^k = l$ Blätter.
- Folglich ist $|vwx| \leq l$ (Bed. 2).
- Schließlich lassen sich Syntaxbäume B_i für die Wörter uv^iwx^iy, $i \geq 0$, wie folgt konstruieren (Bed. 3):
  - B_0 entsteht aus $B_1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen.
  - B_{i+1} entsteht aus B_i, indem wir U' durch U ersetzen:



□

Anwendung des Pumping-Lemmas

Beispiel

- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei.
- Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich $z = a^l b^l c^l$ die Länge $|z| = 3l \geq l$.
- Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen:

  Für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ gehört $z' = uv^2wx^2y$ nicht zu L:
  - Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z| < |z'|$.
  - Wegen $|vwx| \leq l$ kann in vx nicht jedes der drei Zeichen a, b, c vorkommen.
  - Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist

    $$\#_a(z') = \#_a(z) = l = |z|/3 < |z'|/3.$$
  - Also kann z' nicht zu L gehören. $\triangleleft$

Abschlusseigenschaften von CFL

Wie wir gesehen haben, ist die Klasse CFL abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Produkt und
- Sternhülle.

Satz

CFL ist nicht abgeschlossen unter

- Durchschnitt und
- Komplement.

Abschlusseigenschaften von CFL

Beweis von $L_1, L_2 \in \mathrm{CFL} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathrm{CFL}$

- Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

  sind kontextfrei (siehe Übungen).
- Nicht jedoch ihr Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
- Also ist CFL nicht unter Durchschnitt abgeschlossen.

Beweis von $L \in \mathrm{CFL} \not\Rightarrow \bar{L} \in \mathrm{CFL}$

Da CFL zwar unter Vereinigung aber nicht unter Schnitt abgeschlossen ist, kann CFL wegen de Morgan nicht unter Komplement abgeschlossen sein.

Das Wortproblem für CFL

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Frage

Wie lässt sich das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken entscheiden?

Der CYK-Algorithmus

Satz

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

Beweis

- Sei eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \cdots x_n$ gegeben.
- Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$ gilt.
- Hierzu genügt es, die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller ε-ableitbaren Variablen zu berechnen und zu prüfen, ob $S \in E$ ist.
- Andernfalls bringen wir G in CNF und starten den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus.
- Dieser bestimmt mittels dynamischer Programmierung für $l = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, n - l + 1$ die Menge $V_{l,k}$ aller Variablen, aus denen das Teilwort $x_k \cdots x_{k+l-1}$ ableitbar ist.
- Dann gilt $x \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{n,1}$.

Berechnung der Mengen $V_{l,k}$

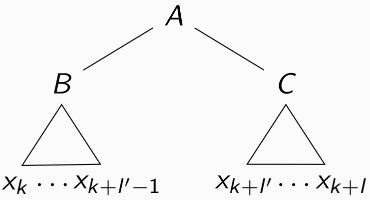
Beweis (Schluss)

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik und sei $x \in \Sigma^+$.
- Dann lassen sich die Mengen

$$V_{l,k} = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \cdots x_{k+l-1}\}$$

  wie folgt bestimmen.
- Für $l = 1$ gehört A zu $V_{1,k}$, falls die Regel $A \to x_k$ existiert,

$$V_{1,k} = \{A \in V \mid A \to x_k\}.$$



- Für $l > 1$ gehört A zu $V_{l,k}$, falls eine Regel $A \to BC$ und eine Zahl $l' \in \{1, \ldots, l-1\}$ ex., so dass $B \in V_{l',k}$ und $C \in V_{l-l',k+l'}$ sind:

$$V_{l,k} = \{A \in V \mid \exists\, l' < l,\ B \in V_{l',k},\ C \in V_{l-l',k+l'} : A \to BC \in P\}. \qquad \square$$

Der CYK-Algorithmus

Algorithmus `CYK`(G, x)

Input: CNF-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und Wort $x = x_1 \cdots x_n$
  for $k := 1$ **to** n **do**
    $V_{1,k} := \{A \in V \mid A \to x_k \in P\}$
  for $l := 2$ **to** n **do**
    for $k := 1$ **to** $n - l + 1$ **do**
      $V_{l,k} := \emptyset$
      for $l' := 1$ **to** $l - 1$ **do**
        for all $A \to BC \in P$ **do**
          if $B \in V_{l',k}$ **and** $C \in V_{l-l',k+l'}$ **then**
            $V_{l,k} := V_{l,k} \cup \{A\}$
  if $S \in V_{n,1}$ **then accept else reject**

Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x bestimmt.

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  $$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX, \quad Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  $$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
  $$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \rightarrow BC, \quad X \rightarrow AS, BX', a, \quad X' \rightarrow XX,$$
$$Y \rightarrow BS, AY', b, \quad Y' \rightarrow YY, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b, \quad C \rightarrow c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1			
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  P: $S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$
  $Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

	k: 1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$		
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  P: $S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$
  $Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  P: $S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$
  $Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  $$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
  $$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$		
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  $$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX, \quad Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

  P: $S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$
  $Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

	k: 1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

- Wegen $S \notin V_{3,1}$ ist $x \notin L(G)$.

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\; S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \rightarrow BC, \quad X \rightarrow AS, BX', a, \quad X' \rightarrow XX,$$
$$Y \rightarrow BS, AY', b, \quad Y' \rightarrow YY, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b, \quad C \rightarrow c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$				

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \rightarrow BC, \quad X \rightarrow AS, BX', a, \quad X' \rightarrow XX,$$
$$Y \rightarrow BS, AY', b, \quad Y' \rightarrow YY, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b, \quad C \rightarrow c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$			

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\; S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$				

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c,\quad S' \to BC,\quad X \to AS, BX', a,\quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b,\quad Y' \to YY,\quad A \to a,\quad B \to b,\quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$					

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \rightarrow BC, \quad X \rightarrow AS, BX', a, \quad X' \rightarrow XX,$$
$$Y \rightarrow BS, AY', b, \quad Y' \rightarrow YY, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b, \quad C \rightarrow c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$				

◁

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

◁

Ein Maschinenmodell für die kontextfreien Sprachen

Frage

Wie lässt sich das Maschinenmodell des DFA erweitern, um die Sprache

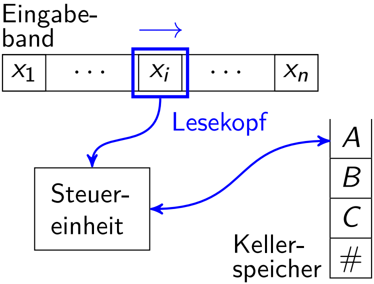
$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

und alle anderen kontextfreien Sprachen erkennen zu können?

Antwort

- Dass ein DFA die Sprache L nicht erkennen kann, liegt an seinem beschränkten Speichervermögen, das zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf.
- Um L erkennen zu können, genügt bereits ein so genannter Kellerspeicher (auch Stapel, engl. *stack* oder *pushdown memory*).
- Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse.

Der Kellerautomat



- verfügt zusätzlich über einen Kellerspeicher,
- kann auch ε-Übergänge machen,
- hat Lesezugriff auf das aktuelle Eingabezeichen und auf das oberste Kellersymbol,
- kann das oberste Kellersymbol löschen (durch eine pop-Operation) und
- danach beliebig viele Symbole einkellern (mittels push-Operationen).

Formale Definition des Kellerautomaten

Notation

Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, d.h.

$$\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}.$$

Definition

Ein Kellerautomat (kurz: PDA, engl. *pushdown automaton*) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- Γ das Kelleralphabet,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die Überführungsfunktion,
- $q_0 \in Z$ der Startzustand und
- $\# \in \Gamma$ das Kelleranfangszeichen ist.

Der Kellerautomat

Arbeitsweise eines PDA

- Wenn p der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(q, B_1 \cdots B_k) \in \delta(p, u, A)$
  - in den Zustand q wechseln,
  - den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u| \in \{0, 1\}$ Positionen vorrücken und
  - das Zeichen A aus- sowie die Zeichenfolge $B_1 \cdots B_k$ einkellern (danach ist B_1 das oberste Kellerzeichen).
- Hierfür sagen wir auch, M führt die Anweisung

  $$puA \to qB_1 \cdots B_k$$

  aus.
- Im Fall $u = \varepsilon$ spricht man auch von einem ε-Übergang.

Formale Definition der Konfiguration eines PDA

- Eine Konfiguration wird durch ein Tripel

  $$K = (p, x_i \cdots x_n, A_1 \cdots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

  beschrieben und besagt, dass
  - p der momentane Zustand,
  - $x_i \cdots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
  - $A_1 \cdots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 ist oberstes Symbol).
- In der Konfiguration $K = (p, x_i \cdots x_n, A_1 \cdots A_l)$ kann M eine bel. Anweisung $puA_1 \to qB_1 \cdots B_k$ mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$ ausführen.

  Diese überführt M in die Folgekonfiguration

  $$K' = (q, x_j \cdots x_n, B_1 \cdots B_k A_2 \cdots A_l) \text{ mit } j = i + |u|.$$

  Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$.
- Eine Rechnung von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \ldots$ mit $K_0 = (q_0, x, \#)$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots$.

  K_0 heißt Startkonfiguration von M bei Eingabe x.

Definition der von einem PDA erkannten Sprache

Notation

Die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir wie üblich mit $\vdash^*$.

Definition

Die von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, q \in Z : (q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Bemerkung

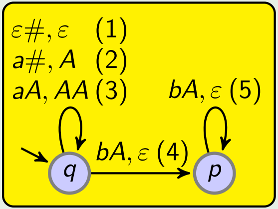
- Ein PDA M akzeptiert also genau dann eine Eingabe x, wenn es eine Rechnung gibt, bei der M
  - das gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und
  - den Keller leert.
- Man beachte, dass bei leerem Keller kein weiterer Übergang mehr möglich ist.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta : q\varepsilon\# \to q \ (1) \quad qa\# \to qA \ (2) \quad qaA \to qAA \ (3)$$
$$qbA \to p \ (4) \quad pbA \to p \quad (5)$$



- Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$(q, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (q, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (p, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

- Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

$n = 0$: $(q, \varepsilon, \#) \underset{(1)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

$n \geq 1$: $(q, a^n b^n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, a^{n-1} b^n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{n-1} (q, b^n, A^n)$

$$\underset{(4)}{\vdash} (p, b^{n-1}, A^{n-1}) \underset{(5)}{\vdash}^{n-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

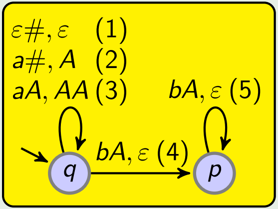
- Dies zeigt, dass M alle Wörter der Form $a^n b^n$, $n \geq 0$, akzeptiert.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\begin{array}{llll} \delta: q\varepsilon\# \to q\ (1) & qa\# \to qA\ (2) & qaA \to qAA\ (3) \\ \quad qbA \to p\ (4) & pbA \to p\ \ (5) & \end{array}$$



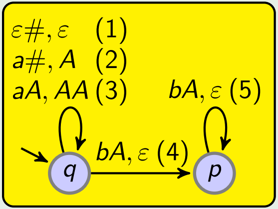
- Als nächstes zeigen wir, dass jede von M akzeptierte Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L(M)$ die Form $x = a^m b^m$ haben muss.
- Ausgehend von der Startkonfiguration $(q, x, \#)$ sind nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar.
- Führt M zuerst Anweisung (1) aus, so wird der Keller geleert.
- Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \varepsilon = a^0 b^0$ akzeptieren.
- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

  $$\delta : q\varepsilon\# \to q \ (1) \quad qa\# \to qA \ (2) \quad qaA \to qAA \ (3)$$
  $$qbA \to p \ (4) \quad pbA \to p \quad (5)$$



- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.
- Dies geschieht, sobald M nach Lesen von $m \geq 1$ a's das erste b liest:

  $$(q, x_1 \cdots x_n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, x_2 \cdots x_n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{m-1} (q, x_{m+1} \cdots x_n, A^m)$$
  $$\underset{(4)}{\vdash} (p, x_{m+2} \cdots x_n, A^{m-1})$$

  mit $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = a$ und $x_{m+1} = b$.
- Um den Keller leeren zu können, muss M nun noch genau $m - 1$ b's lesen, weshalb x auch in diesem Fall die Form $a^m b^m$ haben muss. ◁

Ein Maschinenmodell für die Klasse CFL

Ziel

Als nächstes wollen wir zeigen, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen.

Satz

$\mathrm{CFL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$.

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein PDA$\}$

Idee:

- Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

$$S \Rightarrow^* x_1 \cdots x_n \;\text{ gdw. }\; (q, x_1 \cdots x_n, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

- Hierzu fügen wir folgende Anweisungen zu δ hinzu:

  für jede Regel $A \rightarrow_G \alpha$: $\quad q\varepsilon A \rightarrow q\alpha$,

  für jedes Zeichen $a \in \Sigma$: $\quad qaa \rightarrow q\varepsilon$.

- M versucht also, eine Linksableitung für die Eingabe x zu finden.
- Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet.
- Dann gilt $S \Rightarrow_L^l x_1 \cdots x_n$ gdw. $(q, x_1 \cdots x_n, S) \vdash^{l+n} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Daher folgt

$$x \in L(G) \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_L^* x \;\Leftrightarrow\; (q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; x \in L(M). \qquad \square$$

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein PDA$\}$

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P\colon S \to aSbS \;\; (1), \quad S \to a \;\; (2).$$

- Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

$$\begin{aligned} \delta: qaa &\to q\varepsilon \quad (0) & qbb &\to q\varepsilon \;\; (0') \\ q\varepsilon S &\to qaSbS \;\; (1') & q\varepsilon S &\to qa \;\; (2') \end{aligned}$$

- Der Linksableitung $\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow} a\underline{S}bS \underset{(2)}{\Rightarrow} aab\underline{S} \underset{(2)}{\Rightarrow} aaba$ in G entspricht dann die Rechnung

$$\begin{aligned} (q, aaba, S) &\underset{(1')}{\vdash} (q, aaba, aSbS) \underset{(0)}{\vdash} (q, aba, SbS) \underset{(2')}{\vdash} (q, aba, abS) \\ &\underset{(0)}{\vdash} (q, ba, bS) \underset{(0')}{\vdash} (q, a, S) \underset{(2')}{\vdash} (q, a, a) \underset{(0)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

von M und umgekehrt. $\triangleleft$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathsf{CFL}$

Idee:

- Konstruiere zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablen $X_{pAp'}$, $A \in \Gamma$, $p, p' \in Z$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

  $$X_{pAp'} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon).$$

- Ein Wort x soll also genau dann in G aus $X_{pAp'}$ ableitbar sein, wenn M ausgehend vom Zustand p bei Lesen von x in den Zustand p' gelangen kann und dabei das Zeichen A aus dem Keller entfernt.
- Hierzu fügen wir für jede Anweisung $puA \rightarrow p_0A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, die folgenden $\|Z\|^k$ Regeln zu P hinzu:

  $$\text{Für jede Zustandsfolge } p_1, \ldots, p_k\text{: } X_{pAp_k} \rightarrow uX_{p_0A_1p_1} \cdots X_{p_{k-1}A_kp_k}.$$

- Um damit alle Wörter $x \in L(M)$ aus S ableiten zu können, benötigen wir jetzt nur noch die Regeln

  $$S \rightarrow X_{q_0\#p'},\ p' \in Z.$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p,q\},\{a,b\},\{A,\#\},\delta,p,\#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{array}{lllll} \delta: p\varepsilon\# \to q\varepsilon & (1) & pa\# \to pA & (2) & paA \to pAA & (3) \\ \quad pbA \to q\varepsilon & (4) & qbA \to q\varepsilon & (5) & & \end{array}$$

- Dann erhalten wir die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der Variablenmenge

$$V = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}.$$

- Die Regelmenge P enthält neben den beiden Startregeln

$$S \to X_{p\#p}, X_{p\#q} \quad (0, 0')$$

  die folgenden Produktionen:

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- P enthält neben den beiden Startregeln $S \to X_{p\#p}, X_{p\#q}$ $(0, 0')$ die folgenden Produktionen:

Anweisung		k	$p_1, \ldots, p_k$	zugehörige Regeln	
$p\varepsilon\# \to q\varepsilon$	(1)	0	-	$X_{p\#q} \to \varepsilon$	$(1')$
$pa\# \to pA$	(2)	1	p	$X_{p\#p} \to aX_{pAp}$	$(2')$
			q	$X_{p\#q} \to aX_{pAq}$	$(2'')$
$paA \to pAA$	(3)	2	p, p	$X_{pAp} \to aX_{pAp}X_{pAp}$	$(3')$
			p, q	$X_{pAq} \to aX_{pAp}X_{pAq}$	$(3'')$
			q, p	$X_{pAp} \to aX_{pAq}X_{qAp}$	$(3''')$
			q, q	$X_{pAq} \to aX_{pAq}X_{qAq}$	$(3'''')$
$pbA \to q\varepsilon$	(4)	0	-	$X_{pAq} \to b$	$(4')$
$qbA \to q\varepsilon$	(5)	0	-	$X_{qAq} \to b$	$(5')$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Die Anweisungen

$$\begin{array}{llllll} \delta: p\varepsilon\# \to q\varepsilon & (1) & pa\# \to pA & (2) & paA \to pAA & (3) \\ pbA \to q\varepsilon & (4) & qbA \to q\varepsilon & (5) & & \end{array}$$

von M führen also auf die folgenden Regeln von G:

$$\begin{array}{llll} S \to X_{p\#p}, X_{p\#q} & (0, 0') & X_{p\#q} \to \varepsilon & (1') \\ X_{p\#p} \to aX_{pAp} & (2') & X_{p\#q} \to aX_{pAq} & (2'') \\ X_{pAp} \to aX_{pAp}X_{pAp} & (3') & X_{pAq} \to aX_{pAp}X_{pAq} & (3'') \\ X_{pAp} \to aX_{pAq}X_{qAp} & (3''') & X_{pAq} \to aX_{pAq}X_{qAq} & (3'''') \\ X_{pAq} \to b & (4') & X_{qAq} \to b & (5') \end{array}$$

- Der akzeptierenden Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

von M entspricht dann in G die Linksableitung

$$\underline{S} \underset{(0')}{\Rightarrow} \underline{X_{p\#q}} \underset{(2'')}{\Rightarrow} a\underline{X_{pAq}} \underset{(3'''')}{\Rightarrow} aa\underline{X_{pAq}}X_{qAq} \underset{(4')}{\Rightarrow} aab\underline{X_{qAq}} \underset{(5')}{\Rightarrow} aabb.$$

◁

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

- Für einen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ sei G die Grammatik (V, Σ, P, S) mit $V = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid p, q \in Z, A \in \Gamma\}$, wobei P neben den Regeln $S \to X_{q_0 \# p'}$, $p' \in Z$, für jede Anweisung

  $$puA \to p_0 A_1 \cdots A_k,\ k \geq 0$$

  von M und jede Zustandsfolge $p_1, \ldots, p_k$ die folgende Regel enthält:

  $$X_{pAp_k} \to uX_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}.$$

- Dann lässt sich mit Hilfe der Äquivalenz

  $$X_{pAp'} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon),$$

  deren Beweis wir später nachholen, leicht die Korrektheit von G zeigen:

  $$\begin{aligned} x \in L(M) \quad &\Leftrightarrow \quad (q_0, x, \#) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow \quad S \Rightarrow X_{q_0 \# p'} \Rightarrow^* x \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow \quad x \in L(G). \end{aligned}$$

Beweis von $X_{pAp'} \Rightarrow^* x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon)$

- Es bleibt zu zeigen, dass für alle $p, p' \in Z$, $A \in \Gamma$ und $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenz gilt:

$$X_{pAp'} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon). \qquad (*)$$

- Hierzu zeigen wir durch Induktion über m folgende stärkere Behauptung:

$$X_{pAp'} \Rightarrow^m x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon). \qquad (**)$$

Beweis von $(**)$ durch Induktion über m:

$m = 0$: Da weder $X_{pAp'} \Rightarrow^0 x$ noch $(p, x, A) \vdash^0 (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gelten, ist die Äquivalenz $(**)$ für $m = 0$ erfüllt.

Beweis von $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$

$m \rightsquigarrow m+1$: Wir zeigen zuerst die Implikation von links nach rechts.

- Gelte also $X_{pAp'} \Rightarrow^{m+1} x$ und sei α die im ersten Schritt abgeleitete Satzform, d.h. $X_{pAp'} \Rightarrow \alpha \Rightarrow^m x$.
- Wegen $X_{pAp'} \rightarrow_G \alpha$ gibt es eine Anweisung $puA \rightarrow p_0 A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, und Zustände $p_1, \ldots, p_k \in Z$ mit

  $$\alpha = u\, X_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}, \text{ wobei } p_k = p' \text{ ist.}$$

- Wegen $\alpha \Rightarrow^m x$ ex. eine Zerlegung $x = u u_1 \cdots u_k$ und Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_k = m$ und

  $$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1} \; (i = 0, \ldots, k-1).$$

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

  $$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon), \; i = 0, \ldots, k-1.$$

Beweis von $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$

Induktionsschritt für die Implikation von links nach rechts

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

$$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon),\ i = 0, \dots, k-1,$$

aus denen sich die gesuchte Rechnung der Länge $m + 1$ zusammensetzen lässt:

$$\begin{aligned}
(p, uu_1 \cdots u_k, A) &\vdash && (p_0, u_1 \cdots u_k, A_1 \cdots A_k) \\
&\vdash^{m_1} && (p_1, u_2 \cdots u_k, A_2 \cdots A_k) \\
&\ \vdots && \\
&\vdash^{m_{k-1}} && (p_{k-1}, u_k, A_k) \\
&\vdash^{m_k} && (p_k, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Beweis von $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$

Induktionsschritt für die Implikation von rechts nach links

- Sei nun umgekehrt eine Rechnung der Länge $m + 1$ gegeben:

$$(p, x, A) \vdash (p_0, x', A_1 \cdots A_k) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon).$$

- Sei $puA \to p_0 A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, die im ersten Rechenschritt ausgeführte Anweisung (d.h. $x = ux'$).
- Für $i = 1, \ldots, k$ sei p_i der Zustand, in den M mit Kellerinhalt $A_{i+1} \cdots A_k$ gelangt (d.h. $p_k = p'$).
- Dann enthält P die Regel $X_{pAp_k} \to uX_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}$.
- Zudem sei u_i für $i = 1, \ldots, k$ das Teilwort von x', das M zwischen den Besuchen von p_{i-1} und p_i liest.
- Dann ex. Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_k = m$ und

$$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für } i = 0, \ldots, k - 1.$$

- Nach IV gibt es daher Ableitungen

$$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1},\ i = 0, \ldots, k - 1.$$

Beweis von $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$

Induktionsschritt für die Implikation von rechts nach links

- Nach IV gibt es daher Ableitungen

$$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1},\ i = 0, \dots, k-1,$$

die wir zu der gesuchten Ableitung zusammensetzen können:

$$\begin{aligned}
X_{pAp_k} &\Rightarrow && uX_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-2} A_{k-1} p_{k-1}} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\
&\Rightarrow^{m_1} && uu_1 X_{p_1 A_2 p_2} \cdots X_{p_{k-2} A_{k-1} p_{k-1}} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\
&\vdots && \\
&\Rightarrow^{m_{k-1}} && uu_1 \cdots u_{k-1} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\
&\Rightarrow^{m_k} && uu_1 \cdots u_k = x.
\end{aligned}$$

$\square$