Probeklausur

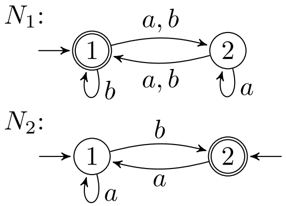
Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 24. 02. 2012 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Teilnahme nur mit Übungsschein.
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.

Hinweis zur Probeklausur:

- Für die Probeklausur sollten Sie von einer Bearbeitungszeit von 200 Minuten ausgehen (d. h. 1 Punkt entspricht 1 Minute).

Aufgabe 1 Betrachten Sie die NFAs N_1 und N_2. ***30 Punkte***



(a) Welche der Wörter ε, bb, aba und bab gehören jeweils zu $L(N_1)$ bzw. zu $L(N_2)$?

(b) Transformieren Sie N_1 mit dem Verfahren aus der Vorlesung in eine äquivalente reguläre Grammatik G.

(c) Konstruieren Sie den Kreuzprodukt-NFA N mit $L(N) = L(N_1) \cap L(N_2)$.

(d) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA M um.

(e) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 ***15 Punkte***

Für zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ sei

$$embed(A,B) = \left\{uvw \in \Sigma^* \,\middle|\, v \in A \wedge uw \in B\right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn B kontextfrei ist, so ist auch $embed(\{\#\}, B)$ kontextfrei.

(b) Wenn A und B kontextfrei sind, so ist auch $embed(A, B)$ kontextfrei.

Aufgabe 3 ***25 Punkte***

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{1, +, \cdot, (,)\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$P: \quad S \to (S + S), \quad S \to S \cdot S, \quad S \to 1.$$

(a) Geben Sie einen PDA für die Sprache $L = L(G)$ an.

(b) Überführen Sie G in Chomsky-Normalform und prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $(1 + 1) \cdot 1$ zu L gehört.

Aufgabe 4 Sei $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. ***15 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $L = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) = \#_b(x) \wedge \#_c(x) = \#_d(x)\}$. Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 5 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie. ***35 Punkte***

(a) Die Sprache $L = \{x \in \{a, b\}^* \mid ax = xa\}$ ist regulär.

(b) Für jede Äquivalenzrelation E gilt $E \circ \bar{E} = \bar{E}$.

(c) Jede Sprache $L \in \mathsf{RE}$ mit $L \leq \bar{L}$ ist entscheidbar.

(d) Jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ mit $\bar{L} \leq L$ ist entscheidbar.

(e) Aus $A \leq^p \textsc{Sat}$ und $A \in \mathsf{NP}$ folgt A ist NP-vollständig.

(f) Aus $A \leq^p \textsc{Sat}$ und $\textsc{Sat} \leq^p A$ folgt A ist NP-vollständig.

(g) Für jeden Graphen G gilt $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Aufgabe 6 ***35 Punkte***

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = x\right\}$,

(b) $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) \neq x\right\}$,

(c) $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \text{ besucht kein Bandfeld mehrmals}\right\}$.

(d) $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \neq w\right\}$,

(e) $L_5 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \forall x \in \{0,1\}^* : M_w(w) = x\right\}$,

(f) $L_6 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, \exists v \in \{0,1\}^* : L(M_v) \subsetneq L(M_w)\right\}$,

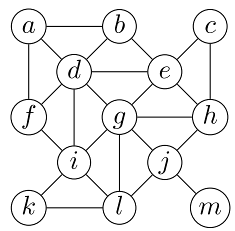
(g) $L_7 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, www \in L(M_w)\right\}$.

Aufgabe 7 Zeigen Sie: ***20 Punkte***

(a) $\textsc{HamPath} \leq^p \textsc{HamCycle}$,

(b) $\textsc{DiHamPath} \leq^p \textsc{HamPath}$.

Aufgabe 8 Betrachten Sie nebenstehenden Graphen G. ***25 Punkte***



Bestimmen Sie folgende Parameter. Begründen Sie.

(a) $\alpha(G) = \max\left\{\|S\| \,\middle|\, S \text{ ist stabil in } G\right\}$,

(b) $\chi(G) = \min\left\{k \geq 1 \,\middle|\, G \text{ ist } k\text{-färbbar}\right\}$,

(c) $\mu(G) = \max\left\{\|M\| \,\middle|\, M \text{ ist ein Matching in } G\right\}$,

(d) $\omega(G) = \max\left\{\|C\| \,\middle|\, C \text{ ist eine Clique in } G\right\}$,

(e) $\beta(G) = \min\left\{\|U\| \,\middle|\, U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\right\}$.

Wie viele Kanten müssen zu G mindestens hinzugefügt werden, um eine Eulerlinie, Eulertour, einen Hamiltonpfad oder Hamiltonkreis zu erhalten? Begründen Sie.