

Übungsblatt 8

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 12.–16. 12. 2011
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11:10 am 4. 01. 2012

Aufgabe 54 *mündlich*
Zeigen Sie, dass die Überführungsrelation \vdash_M eines PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ genau dann rechtseindeutig ist, wenn δ für alle $q \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ die Bedingung $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$ erfüllt.

Aufgabe 55 *mündlich*
Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und \bar{L} an, d. h. $L \in \text{CFL} \cap \text{co-CFL}$. (*Bemerkung:* L ist aber nicht in DCFL.)

Aufgabe 56 *5 Punkte*
(a) Sei A eine (deterministisch) kontextfreie und B sei eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann $A \cap B$ (deterministisch) kontextfrei ist. Müssen dann auch die Sprachen $A \setminus B$ und $A\Delta B$ (deterministisch) kontextfrei sein? (*mündlich*)
(b) Zeigen Sie, dass die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen nicht unter dem perm-Operator (siehe [Aufgabe 33](#)) abgeschlossen ist. (*5 Punkte*)

Aufgabe 57 *5 Punkte*
(a) Zeigen Sie, dass deterministische Kellerautomaten durch Leeren des Kellers genau die präfixfreien Sprachen in DCFL akzeptieren. (*mündlich*)
(b) Zeigen Sie, dass Kellerautomaten mit Endzuständen genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren (also gilt $\text{DCFL} \subseteq \text{CFL}$). (*5 Punkte*)

Aufgabe 58 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in DCFL. Zeigen Sie: *mündlich*
*(a) L wird von einem DPDA erkannt, der für alle Eingaben $x \in L \setminus \{\varepsilon\}$ unmittelbar nach Lesen des letzten Zeichens von x einen Endzustand annimmt. (*optional*)
(b) Für jedes $a \in \Sigma$ ist auch die Sprache $L_{-a} = \{x \in (\Sigma - \{a\})^* \mid x \in L \text{ oder } xa \in L\}$ in DCFL.

Aufgabe 59 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und sei $\$ \notin \Sigma$. Zeigen Sie: *mündlich*
(a) $L\{\$\}$ ist präfixfrei.
(b) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\{\$\}$ in DCFL ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie [Aufgabe 58.b.](#))
(c) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\{\$\}$ von einem deterministischen PDA durch Leeren des Kellers akzeptiert wird.

Aufgabe 60 *mündlich, optional*

- (a) Geben Sie DPDAs für die Sprachen $L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ an. (*Bemerkung:* Da $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \text{CFL}$ ist, sind also weder CFL noch DCFL unter Durchschnitt abgeschlossen.)
(b) Seien $L_0 = \{0\}$, $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$ und $L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = L_0 L_3 \cup L_4 \in \text{DCFL}$ ist, nicht jedoch L^R . (*Hinweis:* Verwenden Sie [Aufgabe 58.b.](#))
(c) Zeigen Sie, dass CFL im Gegensatz zu DCFL unter Spiegelung abgeschlossen ist.

Aufgabe 61 Zeigen Sie: *5 Punkte*

- (a) Die Klasse DCFL ist unter dem min-Operator abgeschlossen. (*mündlich*)
(b) CFL ist nicht unter dem min-Operator abgeschlossen. (*mündlich*)
Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i \leq k \text{ oder } j \leq k\}$.
(c) DCFL ist nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen. (*5 Punkte*)

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung geführten Beweis, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da zwar L_0^* und $L = L_0 L_3 \cup L_4$ (siehe [Aufgabe 60](#)) in DCFL sind, nicht aber $L_0^* L$, und zeigen Sie, dass zwar $L_0 \cup L$, aber nicht $(L_0 \cup L)^*$ in DCFL ist.

Aufgabe 62 *5 Punkte*

Eine kontextfreie Sprache L heißt (*inhärent*) *mehrdeutig*, falls jede kontextfreie Grammatik für L mehrdeutig ist. Wir nennen L *eindeutig*, wenn L nicht mehrdeutig ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Sprache $(L_0 L_3 \cup L_4)^R$ (siehe [Aufgabe 60](#)) ist eindeutig (es gibt also eindeutige Sprachen in $\text{CFL} - \text{DCFL}$). (*mündlich*)
(b) Jede deterministisch kontextfreie Sprache $L \in \text{DCFL}$ ist eindeutig. (*5 Punkte*)

Hinweis: Konstruieren Sie aus einem deterministischen PDA M , der die präfixfreie Sprache $L\{\$\}$ durch Leeren des Kellers akzeptiert (siehe [Aufgabe 59](#)), eine eindeutige kontextfreie Grammatik für $L\{\$\}$ und daraus eine für L .

Bemerkung: Die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k\}$ ist inhärent mehrdeutig (die eindeutigen kontextfreien Sprachen liegen also echt zwischen DCFL und CFL).

Aufgabe 63 *10 Punkte*

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ ein PDA mit $Z = \{q, q', p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta: \quad qa\# \rightarrow qA\#, \quad qaA \rightarrow qAA, \quad qbA \rightarrow q', \quad q'bA \rightarrow q', \quad q'\varepsilon\# \rightarrow p.$$

- (a) Ist $M' = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#, \{p\})$ ein DPDA? Begründen Sie. (*2 Punkte*)
(b) Geben Sie explizite Beschreibungen für $L(M)$ und $L(M')$ an. (*2 Punkte*)
(c) Transformieren Sie M' mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen DPDA für das Komplement von $L(M')$. (*6 Punkte*)