Übungsblatt 5

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 21.–25. 11. 2011
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11:10 am 30. 11. 2011

Aufgabe 31 Zeigen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen ***mündlich***

(a) weder unter Teilmengen- noch unter Obermengenbildung,

(b) weder unter Durchschnitt noch unter Vereinigung über unendlich vielen Sprachen abgeschlossen ist.

Aufgabe 32 Für eine Sprache L seien ***5 Punkte***

$$\min(L) = \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\}$$

und

$$\max(L) = \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}.$$

(a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des min-Operators. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass $L = \max(L)$ die Gleichheit $L = \min(L)$ impliziert. *(mündlich)*

(c) Gilt hiervon auch die Umkehrung? Begründen Sie. *(2 Punkte)*

(d) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem min-Operator abgeschlossen ist, d. h. für $L \in \mathsf{REG}$ folgt $\min(L) \in \mathsf{REG}$. *(mündlich)*

(e) Zeigen Sie, dass REG unter dem max-Operator abgeschlossen ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 33 ***mündlich, optional***

Eine *Permutation* w eines Wortes v entsteht durch beliebige Umordnung der Buchstaben von v. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\text{perm}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist eine Permutation eines Wortes } v \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass REG nicht unter dem perm-Operator abgeschlossen ist.

Aufgabe 34 ***5 Punkte***

Die folgenden Sprachen sind nicht regulär. Beweisen Sie dies, indem Sie jeweils unendlich viele bzgl. R_L paarweise nicht äquivalente Wörter angeben.

(a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m > 0\}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 35 ***mündlich***

Sei L eine Sprache, die von einem DFA M mit m Zuständen erkannt wird. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist L endlich, so enthält L nur Wörter der Länge $\leq m - 1$.

(b) Wenn es in L ein Wort w gibt, das 1^m als Teilwort enthält, dann gibt es für jede Zahl $k \geq 1$ ein Wort in L, das 1^k enthält.

Gelten diese Aussagen auch dann noch, wenn M ein NFA ist?

Aufgabe 36 ***mündlich***

Sei $A = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $aaabb$ in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen.

(b) Bestimmen Sie die Pumping-Zahl für A.

Aufgabe 37 ***10 Punkte***

Sei B die Menge der Dezimaldarstellungen aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes 123456 in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. *(5 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Pumping-Zahl für B. *(5 Punkte)*

Aufgabe 38 ***10 Punkte***

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m > 0\}$. *(10 Punkte)*

Aufgabe 39 ***mündlich***

Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}$.

(a) Zeigen Sie, dass L eine endliche Pumpingzahl l hat. Wie groß ist l?

(b) Zeigen Sie, dass L (dennoch) nicht regulär ist.

Aufgabe 40** ***mündlich, optional

Sei A eine *beliebige* Sprache über einem einelementigen Alphabet. Zeigen Sie, dass A^* regulär ist.

Hinweis: Finden Sie eine endliche Sprache $B \subseteq A$ mit $A^* = B^*$.