

Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7.–11. 11. 2011
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11:10 am 16. 11. 2011

Aufgabe 15 mündlich

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne R_1 die Relation »ist verheiratet mit«, R_2 die Relation »ist Mutter von« und R_3 die Relation »ist Kind von«.

- (a) $R_1 \circ R_2$, (b) $R_2 \circ R_1$, (c) $R_2 \circ R_3$, (d) $R_3 \circ R_2$, (e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 16 mündlich

Betrachten Sie folgende Relation R auf der Menge $V = \{1, \dots, 9\}$.

$$R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (7, 8), (9, 8)\}$$

- (a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation?
(b) Veranschaulichen Sie die Relationen R , R^T , $h_{\text{sym}}(R)$, $h_{\text{äq}}(R)$, R^2 , R^3 , R^+ , $R^* \cap (R^*)^T$ und $R^* \cup (R^*)^T$ jeweils durch einen Digraphen.

Aufgabe 17 mündlich

Betrachten Sie die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$ auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$. Wieviele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf A zu erhalten? Geben Sie diese Paare jeweils an.

Aufgabe 18 Zeigen Sie: 5 Punkte

- (a) $h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$, $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$. (mündlich)
(b) $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$. (2 Punkte)
(c) $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$. (3 Punkte)
(d) $R^* = R^+ \cup R^0 = \bigcup_{i \geq 0} R^i$, $R^+ = R \circ R^*$. (mündlich)
(e) Für eine Relation R auf einer n -elementigen Menge A ist (mündlich)

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i$$

Aufgabe 19 Beweisen Sie:

- (a) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^+$, R^* sind symmetrisch. (mündlich)
(b) Jede reflexive Relation R mit $R \circ R^T \subseteq R$ ist symmetrisch. (mündlich)
(c) R ist genau dann transitiv, wenn $R^2 \subseteq R$ gilt. (5 Punkte)

Aufgabe 20 10 Punkte

Auf der Menge $A = \mathbb{N}^+$ der positiven natürlichen Zahlen seien folgende Relationen definiert:

- (a) $xRy : \Leftrightarrow x + y$ ist gerade, (mündlich)
(b) $xSy : \Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, (3 Punkte)
(c) $xTy : \Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, (3 Punkte)
(d) $xUy : \Leftrightarrow xy$ ist eine Quadratzahl. (4 Punkte)

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an und bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.

Aufgabe 21 mündlich

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Ein Wort $x \in \Sigma^*$ heißt *Teilwort* von y , falls $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $y = uxv$. Auf der Menge Σ^* sei folgende Relation definiert:

$$x \sqsubseteq y : \Leftrightarrow x \text{ ist ein Teilwort von } y.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \sqsubseteq eine Ordnung auf Σ^* ist.
(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Einschränkung \sqsubseteq_A von \sqsubseteq auf die Menge $A = \{a, b, aa, ab, ba, aab, abb, bba, aabba\}$.
(c) Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente von A in der Ordnung (A, \sqsubseteq_A) .
(d) Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie Supremum und Infimum von $H := \{abb, bba\}$ in der Ordnung (A, \sqsubseteq_A) (sofern vorhanden).
(e) Erweitern bzw. verkleinern Sie A um möglichst wenige Wörter aus Σ^* zu A' , so dass H ein Supremum und ein Infimum in der Ordnung $(A', \sqsubseteq_{A'})$ besitzt.

Aufgabe 22 Betrachten Sie die Relation 10 Punkte

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}^*$$

auf der Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- (a) Begründen Sie, dass R eine Ordnung auf A ist und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm. (3 Punkte)
(b) Geben Sie alle maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von A bzgl. R an. (3 Punkte)
(c) Welche Teilmengen von A besitzen zwar untere Schranken, aber kein Infimum? Begründen Sie. (4 Punkte)