

Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 10. Februar 2011

Aufgabe 54

mündlich

Eine Funktion g heißt *parsimonious reduzierbar* auf eine Funktion h (kurz $g \leq_{par} h$), falls eine Funktion $f \in \text{FP}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

- (a) Zeigen Sie, dass folgende Probleme unter parsimonious Reduktionen äquivalent sind: #GI, #COLGI und #DIRGI.
- (b) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln (mit Junktoren \neg , \wedge und \vee) definierte Funktion vollständig für #P unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#SAT : F(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|\{a \in \{0, 1\}^n \mid F(a) = 1\}\|$$

- (c) Folgern Sie, dass $\oplus SAT$ $\oplus P$ -vollständig ist.
- (d) Zeigen Sie, dass Teil (b) für jede vollständige Basis von Junktoren (wie z. B. $\{\wedge, \neg\}$, $\{\rightarrow, 0\}$ oder $\{\wedge, \oplus, 1\}$) gilt.

Aufgabe 55

mündlich

Eine nichtdeterministische Orakel-Turingmaschine (NOTM) N heißt *strong* unter Orakel B , falls N^B bei jeder Eingabe x entweder mindestens eine akzeptierende oder mindestens eine verwerfende Rechnung ausführt, aber nicht beides. Eine NPOTM ist eine polynomiell zeitbeschränkte NOTM. Zeigen Sie:

$$\text{NP}^B \cap \text{co-NP}^B = \{L(N^B) \mid N \text{ ist eine NPOTM, die strong unter } B \text{ ist}\}.$$

Aufgabe 56

Zeigen Sie:

mündlich

- (a) Das Promise-Problem (1SAT, SAT) hat genau dann eine Lösung in BPP, wenn $\text{NP} = \text{RP}$ ist.
- (b) USAT ist in der Klasse $\text{D}^p = \{A \setminus B \mid A, B \in \text{NP}\}$ enthalten und hart für UP und für co-NP.

Aufgabe 57

Zeigen Sie:

mündlich

- (a) $\text{BP} \cdot \text{co-NP} \subseteq \text{R} \cdot \text{co-NP}$,

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis von $\text{BP} \cdot \text{co-NP} \subseteq \exists \cdot \text{co-NP}$ (vgl. Satz von Lautemann).

- (b) $\text{BPP} \subseteq \text{R} \cdot \text{co-NP} \cap \text{co}(\text{R} \cdot \text{co-NP}) \subseteq \text{ZPP}^{\text{NP}}$.

Bemerkung: Es gilt sogar $\text{NP}^{\text{BPP}} \subseteq \text{ZPP}^{\text{NP}}$ (d. h. $\text{NP} \subseteq \text{BPP}$ impliziert $\text{PH} = \text{BPP}$).

Aufgabe 58

Zeigen Sie:

mündlich

- (a) $\oplus \text{P}^{\text{PH}} \subseteq \text{BPP}^{\oplus \text{P}} \subseteq \oplus \text{P}/\text{poly}$,
- (b) $\text{PP}^{\text{PH}} \subseteq \text{P}^{\text{PP}}$.

Aufgabe 59

mündlich

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \text{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \text{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\text{P}/\text{poly} = \text{P}(\text{SPARSE}) = \text{P}(\text{TALLY}).$$

Aufgabe 60

10 Punkte

Konstruieren Sie ein Orakel B mit $\text{NP}^B \neq \text{co-NP}^B$.