

Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. Januar 2011

Aufgabe 50

mündlich

Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n additiv ist: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$.

Aufgabe 51

mündlich

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in \text{SCW}$), falls ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in \text{P}$ und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : x\#y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x\#M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

- (a) $\text{SAT} \in \text{SCW}$.
- (b) $\text{NPC} \subseteq \text{SCW}$, d.h. jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
- (c) Jede Sprache $A \in \text{PSK} \cap \text{SCW}$ hat eine witness-Funktion in PSK , d.h. es existieren ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in \text{P}$ und eine Folge C_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit n Eingängen und $p(n)$ Ausgängen, so dass für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x\#C_n(x) \in B$.

(d) $\text{PSK} \cap \text{SCW} \subseteq \text{NP}(\text{NP})$,

(e) $\text{NP}(\text{NP}(\text{PSK} \cap \text{SCW})) = \text{NP}(\text{NP})$,

(f) SAT ist nicht in PSK enthalten, außer wenn PH auf Σ_2^P kollabiert.

Aufgabe 52 Zeigen Sie:

mündlich

(a) $\#P \subseteq \text{FP}(\text{PP})$,

(b) $\oplus P \subseteq \text{P}(\text{PP})$,

(c) $\oplus P(\oplus P) = \oplus \cdot \oplus \cdot P = \oplus P$,

(d) $\text{BPP}(\text{BPP}) = \text{BP} \cdot \text{BP} \cdot P = \text{BPP}$,

(e) $\text{PP}(\text{BPP}) = P \cdot \text{BP} \cdot P = \text{PP}$.

Aufgabe 53

10 Punkte

Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *und-Funktion* für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x\#y) \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* ist analog definiert. Sei C eine unter \leq_m^{log} -Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein C -vollständiges Problem. Zeigen Sie:

- (a) C ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn A eine und-Funktion in FL hat.
- (b) SAT und GI haben und- und oder-Funktionen in FL .
- (c) GA hat eine oder-Funktion in FL .
- (d) NP , co-NP und $\text{NP} \cap \text{co-NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
- (e) $\text{NP} \cup \text{co-NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist.