Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. Januar 2011

Aufgabe 44 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) PSPACE ist unter allen Operatoren $O \in \{\exists, \forall, \mathsf{R}, \mathsf{BP}, \mathsf{P}, \oplus\}$ abgeschlossen.

(b) PH ist die kleinste Klasse, die P enthält und unter dem $\exists$-Operator und dem $\forall$-Operator abgeschlossen ist.

(c) $\mathsf{PH} \neq \mathsf{PSPACE}$, außer wenn PH kollabiert.

(d) Alle Stufen der Polynomialzeithierarchie sind unter majority-Reduktionen abgeschlossen.

Aufgabe 45 ***mündlich***

Überlegen Sie, wie sich durch geeignete Einschränkung von QBF vollständige Probleme für die Stufen der Polynomialzeithierarchie ableiten lassen.

Aufgabe 46 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann auch unter disjunktiven Reduktionen.

(b) Falls C unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$ unter dem R-Operator abgeschlossen.

(c) Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\exists \cdot \forall \cdot \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C} = \exists \cdot \forall \cdot \mathsf{C}$.

(d) Aus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ folgt $\mathsf{PH} = \Sigma_2^p$.

Aufgabe 47 ***mündlich***

Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten ist. Bezeichne Turnier die Menge aller Turniergraphen und bezeichne DirGI das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

(a) DirGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt DirGI $\equiv_m^{log}$ GI.

(b) Die Anzahl der Automorphismen eines Turniergraphen ist ungerade.

(c) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen Turnier $\cap$ DirGI liegt in $\oplus\mathsf{P}$.

Aufgabe 48 ***mündlich***

Eine k-**Färbung** von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c \colon V \to \{1, \ldots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne ColGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

(a) ColGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt ColGI $\equiv_m^{log}$ GI.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 49 ***10 Punkte***

Zeigen Sie für jede Sprachklasse C, die unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen ist:

(a) $\oplus \cdot \mathsf{C}$ ist unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen,

(b) $\oplus \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\oplus$-Operator abgeschlossen,

(c) $\exists \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\exists$-Operator abgeschlossen,

(d) $\forall \cdot \mathsf{C}$ ist unter dem $\forall$-Operator abgeschlossen,