Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. Januar 2011

Aufgabe 40 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ liegt genau dann in PP, wenn es ein Polynom p und eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ gibt mit

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in L \Leftrightarrow \|\{y \in \{0,1\}^* \mid x\#y \in B\}\| \geq 2^{p(|x|)-1}.$$

(b) MajSat ist PP-vollständig und es gilt $\mathsf{PP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

(c) Nicht jede von einer PTM in erwarteter Laufzeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ akzeptierte Sprache liegt in PP.

Aufgabe 41 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ die Gleichheit $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$ folgt. (*Hinweis:* Benutzen Sie einen BPP-Algorithmus für Sat, um für eine gegebene Formel $F \in$ Sat mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung zu finden.)

Aufgabe 42 ***mündlich***

Sei $\rho \in [0,1]$ eine reelle Zahl. Eine ρ-PTM ist eine PTM mit maximalem Verzweigungsgrad 2, die eine ρ-Münze benutzt: Hat eine Konfiguration K zwei Folgekonfigurationen K' und K'', so gilt $\Pr[K \to_M K'] = \rho$ und $\Pr[K \to_M K''] = 1 - \rho$. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PTMs durch ρ-PTMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ, BPP_ρ, RP_ρ und ZPP_ρ. Zeigen Sie:

(a) Für $\rho \in \{0,1\}$ gilt $\mathsf{PP}_\rho = \mathsf{BPP}_\rho = \mathsf{RP}_\rho = \mathsf{ZPP}_\rho = \mathsf{P}$.

(b) Für $\rho \in (0,1)$ kann jede PTM M durch eine ρ-PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden.

(c) Jede ρ-PTM M kann durch eine PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n-te Bit b_n der Binärrepresentation $0.b_1b_2\ldots$ von ρ ist in Zeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ berechenbar).

(d) Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0,1)$ gilt $\mathsf{BPP} = \mathsf{BPP}_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).

(e) Es gibt Zahlen $\rho \in (0,1)$ mit $\mathsf{PP} \neq \mathsf{PP}_\rho$ (sogar $\mathsf{PP}_\rho \not\subseteq \mathsf{RE}$).

Aufgabe 43 ***10 Punkte***

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus.

Algorithmus: `RandomWalk`

```
Input: KNF-Formel F(x_1, ..., x_n), n ≥ 1, ohne Einerklauseln
  wähle eine beliebige Belegung a für F
  while F(a) = 0 do
    wähle eine beliebige Klausel C von F mit C(a) = 0
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von a(l)
Output: a
```

Sei F eine 2-KNF-Formel (o.B.d.A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung, die F erfüllt. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von RandomWalk(F) polynomiell beschränkt ist.

Hinweis: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die erwartete Anzahl $t(i)$ von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in genau i Variablen von h abweicht:

1. $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$,
2. $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$ für $i = 1, \ldots, n-1$,
3. $t(i) \leq i(2n - i)$ für $i = 0, \ldots, n$.