

Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 2. Dezember 2010

Aufgabe 22

mündlich

Seien $f, g, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $t(n) \geq n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \Leftrightarrow A_t \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))).$$

(b) Zeigen Sie die Implikation

$$\begin{aligned} \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))) &= \text{DTIME}(\mathcal{O}(g(n))) \\ &\Rightarrow \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) = \text{DTIME}(\mathcal{O}(g(t(n))))). \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie für $j, k \geq 1$ und $a > 0$ die Implikationen

$$\begin{aligned} \text{DTIME}(\mathcal{O}(n^k)) &= \text{DTIME}(\mathcal{O}(n^k \log^a n)) \\ &\Rightarrow \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) = \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)), \\ \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) &= \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \\ &\Rightarrow \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+(j-1)an})) = \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+jan})), \\ \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n)) &= \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \\ &\Rightarrow \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n})) = \text{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+(a+1)n})). \end{aligned}$$

(d) Schließen Sie hieraus $\text{DTIME}(n^k) \subsetneq \text{DTIME}(n^k \log^a n)$ für $k \geq 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 23

mündlich

Geben Sie eine Sprache L an, so dass weder L noch \bar{L} rekursiv aufzählbar sind.

Aufgabe 24

mündlich

Zeigen Sie, dass die folgenden Sätze für beliebige Komplexitätsmaße gelten.

- (a) Gap Theorem (siehe Vorlesung)
- (b) Compression Theorem (Aufgabe 19)
- (c) Union Theorem (Aufgabe 21)

Aufgabe 25

mündlich

Zeigen Sie, dass die \leq_m^{\log} -Reduzierbarkeit reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 26

mündlich

Zeigen Sie, dass aus $E = NE$ folgt, dass $EXP = NEXP$ ist.

Aufgabe 27

10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t \rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0, 1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

- (a) K ist E-vollständig.
- (b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.
- (c) E ist nicht unter \leq_m^{\log} abgeschlossen.