Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 18. November 2010

Aufgabe 11 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die Funktionen

(a) $n \mapsto k$,
(b) $n \mapsto \lceil \log n \rceil$,
(c) $n \mapsto \lceil \log n \rceil^k$,
(d) $n \mapsto n \cdot \lceil \log n \rceil$,
(e) $n \mapsto n^k + k$,
(f) $n \mapsto 2^n$ und
(g) $n \mapsto n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

für jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen sind.

Aufgabe 12 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen P und NP abgeschlossen sind unter Vereinigung, Schnitt und dem Kleene-Stern. Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \dots, x_k \in L\}.$$

Aufgabe 13 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass $\mathsf{DSPACE}(\log\log n)$ nichtreguläre Sprachen enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{ bin(1)\# \cdots \# bin(n) \,\middle|\, n \geq 1 \right\},$$

wobei $bin(i)$ die Binärdarstellung der Zahl i (ohne führende Nullen) ist.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass $\mathsf{DSPACE}(o(\log\log n)) = \mathsf{REG}$ ist.

Aufgabe 14 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in $\mathsf{NTIME}(\mathcal{O}(t)) \cap \mathsf{co\text{-}NTIME}(\mathcal{O}(t))$ liegt, falls eine $\mathcal{O}(t(n))$-zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 15 (Blum-Komplexität) ***mündlich***

Eine partielle Funktion Φ, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ definiert ist.
Axiom 2: Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

(a) $\mathrm{time}_M(x)$ und $\mathrm{space}_M(x)$ für DTMs und NTMs.

(b) $\mathrm{ink}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.

(c) $\mathrm{carbon}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.

Dabei sollen $\mathrm{ink}_M(x)$ und $\mathrm{carbon}_M(x)$ (wie $\mathrm{space}_M(x)$) nur dann definiert sein, wenn $M(x)$ nur Rechnungen endlicher Länge ausführt.

Aufgabe 16 ***10 Punkte***

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} \neq \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ ist (*downward separation*).

Hinweis: Betrachten Sie die „tally Version“ einer Sprache $A \subseteq \{0,1\}^*$,

$$\mathrm{tally}(A) = \left\{ 0^{num(1x)} \,\middle|\, x \in A \right\},$$

wobei $num(1x)$ die durch die Binärzahl $1x$ repräsentierte natürliche Zahl ist, und zeigen Sie die Äquivalenzen

$$A \in \mathsf{E} \Leftrightarrow \mathrm{tally}(A) \in \mathsf{P} \text{ bzw. } A \in \mathsf{NE} \Leftrightarrow \mathrm{tally}(A) \in \mathsf{NP}.$$