Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11. November 2010

Aufgabe 7 — *mündlich*

Sei M eine DTM, die für mindestens eine Eingabelänge n nach $\leq n+1$ Schritten hält. Was lässt sich daraus für die Komplexität von $L(M)$ schließen?

Aufgabe 8 — *mündlich*

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$, wobei x^R das Wort ist, bei dem die Symbole von x in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben sind. Beschreiben Sie sowohl eine 1-DTM M als auch eine 2-DTM M', die L entscheidet. Vergleichen Sie die Rechenzeiten von M und M'.

Aufgabe 9 — *mündlich*

Sei M eine DTM. Für jedes Wort $x \in \{0,1\}^*$, für das eine Eingabe $y \in \{0,1\}^*$ mit $M(y) = x$ existiert, bezeichne

$$K_M(x) = \min\{|y| \mid y \in \{0,1\}^*, M(y) = x\}$$

die **Kolmogorov-Komplexität** von x bezüglich M. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine DTM U, so dass für jede DTM M eine Konstante c existiert, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$K_U(x) \leq K_M(x) + c.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine universelle Turingmaschine.

Für die folgenden Teilaufgaben definieren wir $K(x) = K_U(x)$.

(b) Es gibt eine Konstante c, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt: $K(x) \leq |x| + c$.

(c) Für alle $n \geq 0$ gibt es ein Wort x der Länge n mit $K(x) \geq n$.

(d) Geben Sie (möglichst enge) untere und obere Schranken für $K(0^n)$ an.

Aufgabe 10 — *10 Punkte*

Sei M eine 1-DTM, die die Sprache $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\}$ der Palindrome entscheidet. Wir möchten zeigen, dass M hierzu Zeit $\Omega(n^2)$ benötigt. Führt M eine Konfiguration (q, u, av) in die Konfiguration (q', u', v') über, so heißt dieser Übergang **Überquerung** der i-ten Feldgrenze im Zustand q', falls

- $|u| = i - 1$ und $|u'| = i$ oder
- $|u| = i$ und $|u'| = i - 1$

gilt. Überquert M bei Eingabe x die i-te Feldgrenze m-mal, so heißt die Folge

$$S_i(M, x) = q_1, \ldots, q_m$$

der dabei angenommenen Zustände **Überquerungsfolge** (engl. crossing-sequence) für die i-te Feldgrenze. Für $y \in \{0,1\}^n$ sei $t(y) = \mathrm{time}_M(y0^n y^R)$ der Zeitverbrauch von M bei Eingabe des Palindroms $x = y0^n y^R$.
Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Zahl i, $n \leq i \leq 2n$, so dass $S_i(M, x)$ die Länge $m \leq \frac{t(y)}{n}$ hat.

(b) Das Wort y ist eindeutig durch Angabe von M, $S_i(M, x)$, n und i beschreibbar.

(c) $K(y) \in \mathcal{O}\left(\frac{t(y)}{|y|} + \log |y|\right)$.

(d) M benötigt Zeit $\Omega(n^2)$.