

Vorlesungsskript
Theoretische Informatik 2
Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

29. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Reguläre Sprachen	2
2.1	Endliche Automaten	2
2.2	Nichtdeterministische endliche Automaten	4
2.3	Reguläre Ausdrücke	7
2.4	Relationalstrukturen	9
2.4.1	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	13
2.4.2	Abbildungen	16
2.4.3	Homo- und Isomorphismen	17

1 Einleitung

In der Vorlesung ThI 1 standen die mathematischen Grundlagen der Informatik im Vordergrund. Insbesondere lernten Sie, wie man folgerichtig argumentiert und wie man formale Beweise führt. Als universelle Sprache der Mathematik lernten Sie dabei die mathematische Logik kennen, insbesondere die Aussagenlogik und darauf aufbauend die Prädikatenlogik. In dieser Sprache lassen sich nicht nur algebraische und relationale Strukturen modellieren, sondern auch Rechenmaschinen wie zum Beispiel die Turingmaschine.

Ein weiteres wichtiges Thema der Vorlesung ThI1 war die Frage, welche Probleme algorithmisch lösbar sind.

Themen der Vorlesung ThI1

- Mathematische Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung (Aussagenlogik, Prädikatenlogik)
- Welche Probleme sind lösbar? (Berechenbarkeitstheorie)

Dagegen stehen in dieser Vorlesung folgende Fragen im Mittelpunkt.

Themen der Vorlesung ThI2

- Welche Rechenmodelle sind für bestimmte Aufgaben adäquat? (Automatentheorie)
- Welcher Aufwand ist zur Lösung eines algorithmischen Problems nötig? (Komplexitätstheorie)

Schließlich wird es in der Vorlesung ThI 3 in erster Linie um folgende Frage gehen.

Thema der Vorlesung ThI3

- Wie lassen sich eine Reihe von praktisch relevanten Problemstellungen möglichst effizient lösen? (Algorithmik)

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. Hier beschäftigen wir uns mit mathematischen Modellen für Maschinentypen von unterschiedlicher Berechnungskraft. In der Vorlesung Theoretische Informatik 1 wurde die Turingmaschine als ein universales Berechnungsmodell eingeführt. In ThI3 wird das etwas flexiblere Modell der Registermaschine (engl. random access machine; RAM) benutzt. Dieses Modell erlaubt den unmittelbaren Lese- und Schreibzugriff (**random access**) auf eine beliebige Speichereinheit (Register). Hier betrachten wir Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B. endliche Automaten (DFA, NFA), Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten **Muhammed Al Chwarizmi** (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er jede *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten löst (etwa durch Produktion einer *Ausgabe*). Ein Algorithmus ist ein „Verfahren“ zur Lösung eines Berechnungsproblems, das sich prinzipiell auf einer Turingmaschine implementieren lässt (**Church-Turing-These**).

Wir betrachten zunächst nur Entscheidungsprobleme, was der Berechnung von $\{0, 1\}$ -wertigen Funktionen entspricht. Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein. Diese werden über einem *Eingabealphabet* Σ kodiert.

Definition 1. Ein **Alphabet** ist eine geordnete endliche Menge $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$, $m \geq 1$, von **Zeichen**. Eine Folge $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^n$ heißt **Wort** (der **Länge** n). Die Menge aller Wörter über Σ ist

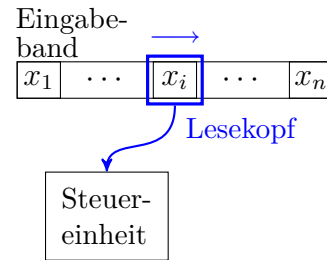
$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 0 \text{ und } x_i \in \Sigma \text{ für } i = 1, \dots, n\}.$$

Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das **leere Wort**, welches wir mit ε bezeichnen. Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **Sprache** über dem Alphabet Σ .

2 Reguläre Sprachen

2.1 Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist eine „abgespeckte“ Turingmaschine, die nur konstant viel Speicherplatz benötigt und bei Eingaben der Länge n nur n Rechenschritte ausführt. Um die gesamte Eingabe lesen zu können, muss der Automat also in jedem Schritt ein Zeichen der Eingabe verarbeiten.



Definition 2. Ein **endlicher Automat** (kurz: DFA; deterministic finite automaton) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ das **Eingabealphabet**,
- $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z$ die **Überföhrungsfunktion**,
- $q_0 \in Z$ der **Startzustand** und
- $E \subseteq Z$ die Menge der **Endzustände** ist.

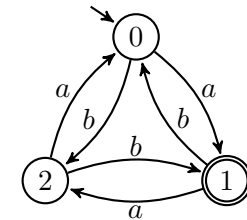
Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \cdots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ f\u00fcr } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Beispiel 3. Betrachte den DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überföhrungsfunktion

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird meist durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet. \triangleleft

Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird. Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$$

induktiv wie folgt definieren. Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

Die von M erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

schreiben.

Behauptung 1. Der DFA M aus Beispiel 3 akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv 1 \pmod{3}\},$$

wobei $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a in x bezeichnet und $j \equiv k \pmod{m}$ bedeutet, dass $j - k$ durch m teilbar ist. Für $j \equiv k \pmod{m}$ schreiben wir im Folgenden auch kurz $j \equiv_m k$.

Beweis. Da M nur den Endzustand 1 hat, ist $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$. Daher reicht es, folgende Kongruenzgleichung zu zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

Wir beweisen die Kongruenz induktiv über die Länge n von x .

Induktionsanfang ($n = 0$): klar, da $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $x = x_1 \cdots x_{n+1}$ gegeben und sei

$$i = \hat{\delta}(0, x_1 \cdots x_n).$$

$$i \equiv_3 \#_a(x_1 \cdots x_n) - \#_b(x_1 \cdots x_n).$$

Wegen $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$ und $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$ folgt

$$\delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) = \#_a(x) - \#_b(x).$$

Folglich ist

$$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \cdots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x). \quad \blacksquare$$

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als **regulär** bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

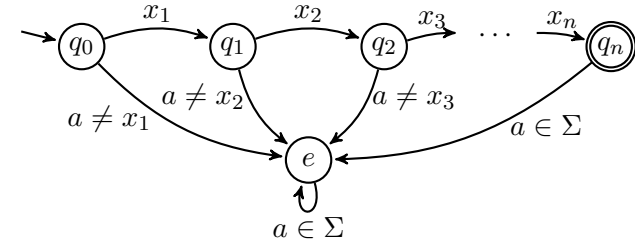
$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Um ein intuitives Verständnis für die Berechnungskraft von DFAs zu entwickeln, werden wir Antworten auf folgende Frage suchen.

Frage: Welche Sprachen gehören zu REG und welche nicht?

Dabei legen wir unseren Überlegungen ein beliebiges aber fest gewähltes Alphabet $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ zugrunde.

Beobachtung 4. Alle Sprachen, die aus einem einzigen Wort $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ bestehen (diese Sprachen werden auch als Singletonsprachen bezeichnet), sind regulär. Für folgenden DFA M gilt nämlich $L(M) = \{x\}$.



Formal lässt sich M also durch das Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_n, e\}$, $E = \{q_n\}$ und der Überföhrungsfunktion

$$\delta(q, a_j) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i \text{ f\u00fcr ein } i \text{ mit } 0 \leq i \leq n - 1 \text{ und } a_j = x_{i+1} \\ e, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben.

Als n\u00e4chstes betrachten wir Abschlusseigenschaften der Sprachklasse REG.

Definition 5. Ein (**k-stelliger**) **Sprachoperator** ist eine Abbildung op , die k Sprachen L_1, \dots, L_k auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.

Beispiel 6. Der 2-stellige Schnittoperator bildet zwei Sprachen L_1 und L_2 auf die Sprache $L_1 \cap L_2$ ab. \triangleleft

Definition 7. Eine Sprachklasse \mathcal{K} hei\u00dft unter op **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

Der **Abschluss** von \mathcal{K} unter op ist die kleinste Sprachklasse \mathcal{K}' , die \mathcal{K} enth\u00e4lt und unter op abgeschlossen ist.

Definition 8. F\u00fcr eine Sprachklasse \mathcal{C} bezeichne $co\text{-}\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in \mathcal{C} .

Es ist leicht zu sehen, dass \mathcal{C} genau dann unter Komplementbildung abgeschlossen ist, wenn $co\text{-}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ist.

Beobachtung 9. Mit $L_1, L_2 \in \text{REG}$ sind auch die Sprachen $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$, $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \cup L_2$ regulär. Sind nämlich $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_0, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$, so akzeptiert der DFA

$$\overline{M_1} = (Z_1, \Sigma, \delta_1, q_0, Z_1 \setminus E_1)$$

das Komplement $\overline{L_1}$ von L_1 . Der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von L_1 und L_2 wird dagegen von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_0, q_0), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((q, p), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(p, a))$$

akzeptiert (M wird auch **Kreuzproduktautomat** genannt). Wegen $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ ist dann aber auch die Vereinigung von L_1 und L_2 regulär. (Wie sieht der zugehörige DFA aus?)

Aus Beobachtung 9 folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind. Da die in Beispiel 3 betrachtete Sprache weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob REG neben den mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement unter weiteren Operationen wie etwa der **Produktbildung**

$$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

(auch **Verkettung** oder **Konkatenation** genannt) oder der Bildung der **Sternhülle**

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

abgeschlossen ist. Die n -fache Potenz L^n von L ist dabei induktiv definiert durch

$$L^0 = \{\varepsilon\}, L^{n+1} = L^n L.$$

Die **Plushülle** von L ist

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = LL^*.$$

Ist $L_1 = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für das Produkt $\{x\}L_2$ auch einfach xL_2 .

Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Klasse REG als der Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produktbildung und Sternhülle charakterisierbar ist.

Beim Versuch, einen endlichen Automaten für das Produkt $L_1 L_2$ zweier regulärer Sprachen zu konstruieren, stößt man auf die Schwierigkeit, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden. Unter Verwendung eines nichtdeterministischen Automaten lässt sich dieses Problem jedoch leicht beheben, da dieser den richtigen Zeitpunkt „erraten“ kann.

Im nächsten Abschnitt werden wir nachweisen, dass auch nichtdeterministische endliche Automaten nur reguläre Sprachen erkennen können.

2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition 10. Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat* (kurz: *NFA*; nondeterministic finite automaton) $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ist ähnlich aufgebaut wie ein DFA, nur dass er mehrere Startzustände (zusammengefasst in der Menge $Q_0 \subseteq Z$) haben kann und seine Überföhrungsfunktion die Form

$$\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen) von Z . Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet. Die von N akzeptierte Sprache ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \cdots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ q_{i+1} \in \delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

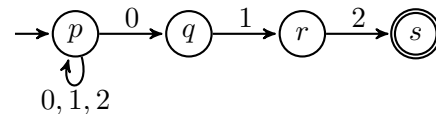
Ein NFA kann also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen ausführen. Die Eingabe gehört bereits dann zu $L(N)$, wenn bei einer dieser Rechnungen nach Lesen des gesamten Eingabewortes ein Endzustand erreicht wird.

Im Gegensatz zu einem DFA, dessen Überföhrungsfunktion auf der gesamten Menge $Z \times \Sigma$ definiert ist, kann ein NFA „stecken bleiben“. Das ist dann der Fall, wenn er in einen Zustand q gelangt, in dem das nächste Eingabezeichen x_i wegen $\delta(q, x_i) = \emptyset$ nicht gelesen werden kann.

Beispiel 11. Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ mit Zustandsmenge $Z = \{p, q, r, s\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, Start- und Endzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und $E = \{s\}$ sowie der Überföhrungsfunktion

δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\{p\}$	$\{r\}$	\emptyset	\emptyset
2	$\{p\}$	\emptyset	$\{s\}$	\emptyset

Graphische Darstellung:



Offensichtlich akzeptiert N die Sprache $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. \triangleleft

Beobachtung 12. Sind $N_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) NFAs, so werden auch die Sprachen $L(N_1)L(N_2)$ und $L(N_1)^*$ von einem NFA erkannt. Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ annehmen. Dann akzeptiert der NFA

$$N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, Q_1, E)$$

mit

$$\delta(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_1 \cup E_2, & Q_2 \cap E_2 \neq \emptyset \\ E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L(N_1)L(N_2)$ und der NFA

$$N^* = (Z_1 \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta^*, Q_1 \cup \{q_{neu}\}, E_1 \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta^*(p, a) = \begin{cases} \delta(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_1} \delta(q, a), & p \in E_1, \\ \delta(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L(N_1)^*$.

Satz 13 (Rabin und Scott).

$\text{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar, da jeder DFA auch als NFA aufgefasst werden kann. Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ einen DFA $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$ mit $L(M) = L(N)$. Wir definieren die Überföhrungsfunktion $\delta' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ von M mittels

$$\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a).$$

Die Menge $\delta'(Q, a)$ enthält also alle Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest. Intuitiv bedeutet dies, dass der DFA M den NFA N simuliert, indem M in seinem aktuellen Zustand Q die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte. Für die Erweiterung $\hat{\delta}' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ von δ' (siehe Seite 2) können wir nun folgende Behauptung zeigen:

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält alle Zustände, die N ausgehend von einem Startzustand nach Lesen der Eingabe x erreichen kann.

Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Länge n von x .

Induktionsanfang ($n = 0$): klar, da $\hat{\delta}'(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

Induktionsschritt ($n - 1 \rightsquigarrow n$): Sei $x = x_1 \cdots x_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}'(Q_0, x_1 \cdots x_{n-1})$$

alle Zustände, die $N(x)$ in genau $n - 1$ Schritten erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}'(Q_0, x) = \delta'(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}'(Q_0, x)$ alle Zustände, die $N(x)$ in genau n Schritten erreichen kann.

Deklarieren wir nun diejenigen Teilmengen $Q \subseteq Z$, die mindestens einen Endzustand von N enthalten, als Endzustände des **Potenzmengenautomaten** M , d.h.

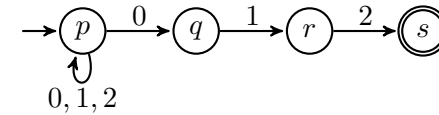
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\},$$

so folgt für alle Wörter $x \in \Sigma^*$:

- $x \in L(N) \iff N(x)$ kann in genau $|x|$ Schritten einen Endzustand erreichen
- $\iff \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset$
- $\iff \hat{\delta}'(Q_0, x) \in E'$
- $\iff x \in L(M)$.

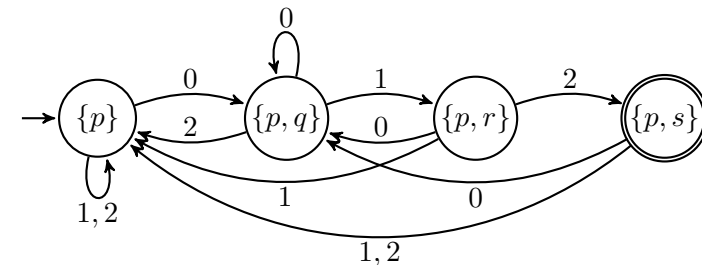


Beispiel 14. Für den NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ aus Beispiel 11



ergibt die Konstruktion des vorigen Satzes den folgenden DFA M (nach Entfernen aller vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus nicht erreichbaren Zustände):

δ'	0	1	2
$Q_0 = \{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$Q_1 = \{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$Q_2 = \{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$Q_3 = \{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



Im obigen Beispiel wurden für die Konstruktion des DFA M aus dem NFA N nur 4 der insgesamt $2^{|Z|} = 16$ Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ nicht vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus erreichbar sind. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{|Z|}$ Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten benötigt werden (siehe Übungen).

Korollar 15. Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

2.3 Reguläre Ausdrücke

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon überzeugt, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen können:

$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen kennen lernen:

REG ist die Klasse aller Sprachen, die sich mittels der Operationen Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus der leeren Menge und den Singletonsprachen bilden lassen.

Tatsächlich kann hierbei sogar auf die Durchschnitts- und Komplementbildung verzichtet werden.

Definition 16. Die Menge der **regulären Ausdrücke** γ (über einem Alphabet Σ) und die durch γ dargestellte Sprache $L(\gamma)$ sind induktiv wie folgt definiert. Die Symbole \emptyset , ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke, die

- die leere Sprache $L(\emptyset) = \emptyset$,
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und
- für jedes Zeichen $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$

beschreiben. Sind α und β reguläre Ausdrücke, die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke, die die Sprachen

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ und

- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$

beschreiben.

Beispiel 17. Die regulären Ausdrücke ϵ^* , \emptyset^* , $(0|1)^*00$ und $(\epsilon 0|\emptyset 1^*)$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	ϵ^*	\emptyset^*	$(0 1)^*00$	$(\epsilon 0 \emptyset 1^*)$
$L(\gamma)$	$\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$	$\emptyset^* = \{\epsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0, 1\}^*\}$	$\{0\}$

◁

Bemerkung 18.

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende **Präzedenzordnung**: Der Sternoperator $*$ bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator. Für $((a|b(c)^*)|d)$ können wir also kurz $a|bc^*|d$ schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$.

Beispiel 19. Betrachte nebenstehenden DFA M .

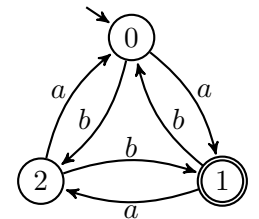
Um für die von M erkannte Sprache

$$L(M) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

einen regulären Ausdruck zu finden, betrachten wir zunächst die Sprache

$$L_0 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 0\}.$$

L_0 enthält also alle Wörter x , die den DFA M ausgehend vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen. Jedes solche x setzt sich aus beliebig vielen Teilwörtern y zusammen, die M vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen, ohne zwischendurch den Zustand 0 anzunehmen. Jedes solche y beginnt entweder mit einem a (Übergang von 0 nach 1) oder mit einem b (Übergang von 0 nach 2). Im ersten Fall folgt eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ab (Wechsel zwischen 1 und 2), an die sich entweder das Suffix aa (Rückkehr von 1 nach 0 über 2) oder das Suffix b (direkte Rückkehr von 1 nach 0) anschließt.



Analog folgt im zweiten Fall eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ba (Wechsel zwischen 2 und 1), an die sich entweder das Suffix a (direkte Rückkehr von 2 nach 0) oder das Suffix bb (Rückkehr von 2 nach 0 über 1) anschließt. Daher lässt sich L_0 durch den regulären Ausdruck

$$\gamma_0 = (a(ab)^*(aa|b) | b(ba)^*(a|bb))^*$$

beschreiben. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass sich die Wörter, die M ausgehend von 0 in den Zustand 1 überführen, ohne dass zwischendurch der Zustand 0 nochmals besucht wird, durch den regulären Ausdruck $(a|bb)(ab)^*$ beschrieben werden. Somit erhalten wir für $L(M)$ den regulären Ausdruck $\gamma = \gamma_0(a|bb)(ab)^*$. \triangleleft

Satz 20. $\text{REG} = \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}$.

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist klar, da die Basisausdrücke \emptyset , ϵ und a , $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist (siehe Beobachtungen 9 und 12).

Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem DFA M einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$. Sei also $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, wobei wir annehmen können, dass $Z = \{1, \dots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist. Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form

$$L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$$

darstellen. Folglich reicht es zu zeigen, dass die Sprachen $L_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind. Hierzu betrachten wir die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \left\{ x_1 \cdots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \hat{\delta}(p, x_1 \cdots x_n) = q \text{ und für} \\ i = 1, \dots, n-1 \text{ gilt } \hat{\delta}(p, x_1 \cdots x_i) \leq r \end{array} \right\}.$$

Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ anzugeben. Im Fall $r = 0$ enthält

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\epsilon\}, & p = q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

nur Buchstaben (und eventuell das leere Wort) und ist somit leicht durch einen regulären Ausdruck $\gamma_{p,q}^0$ beschreibbar. Wegen

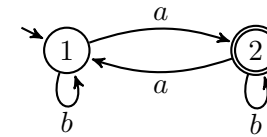
$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r$$

lassen sich aus den regulären Ausdrücken $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ leicht reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}^{r+1}$ gewinnen:

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r \mid \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r.$$

■

Beispiel 21. Betrachte den DFA



Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^2 = L(\gamma_{1,2}^2).$$

Um $\gamma_{1,2}^2$ zu berechnen, benutzen wir die Rekursionsformel

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r \mid \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^2 &= \gamma_{1,2}^1 \mid \gamma_{1,2}^1 (\gamma_{2,2}^1)^* \gamma_{2,2}^1, \\ \gamma_{1,2}^1 &= \gamma_{1,2}^0 \mid \gamma_{1,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0, \\ \gamma_{2,2}^1 &= \gamma_{2,2}^0 \mid \gamma_{2,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0. \end{aligned}$$

Um den regulären Ausdruck $\gamma_{1,2}^2$ für $L(M)$ zu erhalten, genügt es also, die regulären Ausdrücke $\gamma_{1,1}^0, \gamma_{1,2}^0, \gamma_{2,1}^0, \gamma_{2,2}^0, \gamma_{1,2}^1$ und $\gamma_{2,2}^1$ zu berechnen:

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	ϵb
1	-	$\underbrace{a (\epsilon b)(\epsilon b)^*a}_{b^*a}$	-	$\underbrace{(\epsilon b)a(\epsilon b)^*a}_{\epsilon b ab^*a}$
2	-	$\underbrace{b^*a b^*a(\epsilon b ab^*a)^*(\epsilon b ab^*a)}_{b^*a(b ab^*a)^*}$	-	-

◁

Korollar 22. Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- L lässt sich mit den Operationen \cap, \cup , Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Wir werden bald noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken. Zuvor befassen wir uns jedoch mit dem Problem, DFAs zu minimieren. Dabei spielen Relationen (insbesondere Äquivalenzrelationen) eine wichtige Rolle.

2.4 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i -stellige Relation auf A , d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \dots, R_n)$ **Relationalstruktur**. Die Menge A heißt **Grundmenge**, **Trägermenge** oder **Individuenbereich** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1, k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine **(binäre) Relation** auf A . Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die **Infix-Schreibweise** aRb benutzt.

Beispiel 23.

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und

$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}.$$

- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und

$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}.$$

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer beliebigen Menge M und \subseteq die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von M ist.
- (A, Id_A) , wobei $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ die **Identität auf A** ist.
- (\mathbb{R}, \leq) .
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet.
- $(\mathcal{Fml}, \Rightarrow)$ mit $\mathcal{Fml} = \{F \mid F \text{ ist aussagenlogische Formel}\}$ und

$$\Rightarrow = \{(F, G) \in \mathcal{Fml} \times \mathcal{Fml} \mid G \text{ ist Folgerung von } F\}. \quad \triangleleft$$

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen **Durchschnitt**, **Vereinigung**, **Komplement**

und **Differenz** definiert. Seien R und S Relationen auf A , dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

Sei allgemeiner $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A . Dann sind der **Schnitt über \mathcal{M}** und die **Vereinigung über \mathcal{M}** folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist die **Inklusionsrelation** $R \subseteq S$ auf Relationen von Bedeutung:

$$R \subseteq S \Leftrightarrow \forall x, y : xRy \rightarrow xSy.$$

Die **transponierte (konverse) Relation** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Seien R und S Relationen auf A . Das **Produkt** oder die **Komposition** von R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel 24. Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. \triangleleft

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS . Das n -fache Relationenprodukt $R \circ \dots \circ R$ von R wird mit R^n bezeichnet. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht: Das n -fache Relationenprodukt R^n von R sollte nicht mit dem n -fachen kartesischen Produkt $R \times \dots \times R$ der Menge R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation auf A . Dann heißt R

reflexiv ,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv ,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex ,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv ,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

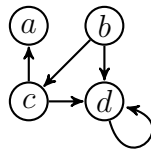
Beispiel 25.

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex.
- (\mathbb{R}, \leq) und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
- (\mathbb{R}, \leq) ist auch konnex und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist im Fall $\|M\| \leq 1$ zwar auch konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex. \triangleleft

Graphische Darstellung von Relationen

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen **gerichteten Graphen** (oder **Digraphen**) $G = (V, E)$ mit **Knotenmenge** $V = A$ und **Kantenmenge** $E = R$ veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **benachbart** oder **adjazent**.

Beispiel 26. Für die Relation (A, R) mit $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ erhalten wir folgende graphische Darstellung.



◁

Der **Ausgangsgrad** eines Knotens $x \in V$ ist $\deg^+(x) = \|R(x)\|$, wobei $R(x) = \{y \in V \mid xRy\}$ der **Nachbereich** von x ist. Entsprechend ist $\deg^-(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der **Eingangsgrad** von x . Falls R symmetrisch ist, werden die Pfeilspitzen meist weggelassen. In diesem Fall ist $d(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der **Grad** von x . Ist R zudem irreflexiv, so ist G **schleifenfrei** und wir erhalten einen **(ungerichteten) Graphen**.

Darstellung durch eine Adjazenzmatrix

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich durch eine boolesche $n \times n$ -Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Darstellung durch eine Adjazenzliste

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seinen Nachbereich $R(x)$ in Form einer Liste zuordnet:

x	$R(x)$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$ -Matrizen für R und S , so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Der Nachbereich $T(x)$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T(x) = \bigcup \{S(y) \mid y \in R(x)\} = \bigcup_{y \in R(x)} S(y).$$

Beispiel 27. Betrachte die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$ auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenzmatrix	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
Adjazenzliste	$a : a, c$ $b : -$ $c : b, d$ $d : -$	$a : b$ $b : -$ $c : -$ $d : a, c$	$a : b$ $b : -$ $c : a, c$ $d : -$	$a : -$ $b : -$ $c : -$ $d : a, b, c, d$

◁

Beobachtung: Das Beispiel zeigt, dass das Relationenprodukt nicht kommutativ ist, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationenprodukt \circ als binärer Operation und der Relation Id_A als neutralem Element eine Halbgruppe (oder **Monoid**) bildet.

Satz 28. Seien Q, R, S Relationen auf A . Dann gilt

- (i) $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. \circ ist assoziativ,
- (ii) $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Beweis.

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 x (Q \circ R) \circ S y &\Leftrightarrow \exists u \in A : x (Q \circ R) u \wedge u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists u \in A : (\exists v \in A : x Q v R u) \wedge u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists u, v \in A : x Q v R u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v \wedge (\exists u \in A : v R u \wedge u S y) \\
 &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v (R \circ S) y \\
 &\Leftrightarrow x Q \circ (R \circ S) y
 \end{aligned}$$

- (ii) Wegen $x Id \circ R y \Leftrightarrow \exists z : x = z \wedge z R y \Leftrightarrow x R y$ folgt $Id \circ R = R$. Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog. ■

Manchmal steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Relation R durch eine möglichst kleine Modifikation in eine Relation R' mit vorgegebenen Eigenschaften zu überführen. Will man dabei alle in R enthaltenen Paare beibehalten, dann sollte R' aus R durch Hinzufügen möglichst weniger Paare hervorgehen.

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge reflexiver (bzw. transitiver oder symmetrischer) Relationen wieder reflexiv (bzw. transitiv oder symmetrisch) ist. Folglich existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste reflexive (bzw. transitive oder symmetrische) Relation R' , die R enthält.

Definition 29. Sei R eine Relation.

- Die **reflexive Hülle** von R ist

$$h_{refl}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **symmetrische Hülle** von R ist

$$h_{sym}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die **transitive Hülle** von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

Satz 30. Sei R eine Relation auf A .

- (i) $h_{refl}(R) = R \cup Id_A$,
- (ii) $h_{sym}(R) = R \cup R^T$,

- (iii) $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$,
- (iv) $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.

Beweis. Siehe Übungen. ■

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, dass ein Paar (a, b) genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R ist, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$, d.h. es gibt Elemente $x_0, \dots, x_n \in A$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und

$$x_0 R x_1 R x_2 \cdots x_{n-1} R x_n.$$

In der Graphentheorie nennt man x_0, \dots, x_n einen **Weg** der Länge n von a nach b .

2.4.1 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓			✓	
lineare Ordnung			✓	✓			✓
lin. Striktord.			✓			✓	✓
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen können.

Wir betrachten zunächst **Äquivalenzrelationen**, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv definiert sind.

Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man den zu x gehörigen Nachbereich $E(x)$ die **von x repräsentierte Äquivalenzklasse** und bezeichnet sie mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$. Die durch E auf A induzierte Partition $\{[x] \mid x \in A\}$ wird **Quotienten- oder Faktormenge** genannt und mit A/E bezeichnet. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von E wird auch als der **Index** von E bezeichnet. Eine Menge $S \subseteq A$ heißt **Repräsentantensystem**, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 31.

- Auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 die Parallelität. Offenbar bilden alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) jeweils eine Äquivalenzklasse. Daher wird ein Repräsentantensystem beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie". Hier bildet jeder Jahrgang eine Äquivalenzklasse.
- Auf \mathbb{Z} die Relation "gleicher Rest bei Division durch m ". Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod m = r\}.$$

Ein Repräsentantensystem wird also durch die Reste $\{0, 1, \dots, m-1\}$ gebildet.

- Auf der Menge der aussagenlogischen Formeln die semantische Äquivalenz. Hier bilden beispielsweise alle Tautologien eine Äquivalenzklasse. ◁

Definition 32. Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $M_i \subseteq A$ heißt **Partition** der Menge A , falls gilt:

- a) die Mengen M_i **überdecken** A , d.h. $A = \bigcup_{i \in I} M_i$ und
- b) die Mengen M_i sind **paarweise disjunkt**, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $M_i \neq M_j$ gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$.

Wie der nächste Satz zeigt, beschreiben Äquivalenzrelationen auf A und Partitionen von A denselben Sachverhalt.

Satz 33. *Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) E ist eine Äquivalenzrelation auf A .
- (ii) Für alle $x, y \in A$ gilt

$$xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y) \quad (*)$$

- (iii) E ist reflexiv und $\{E(x) \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A .

Beweis.

- (i) \Rightarrow (ii) Sei E eine Äquivalenzrelation auf A . Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E(y) \subseteq E(x)$:

$$z \in E(y) \Rightarrow yEz \Rightarrow xEz \Rightarrow z \in E(x).$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E(x) \subseteq E(y)$.

Umgekehrt folgt aus $E(x) = E(y)$ wegen der Reflexivität von E , dass $x \in E(x) = E(y)$ enthalten ist, und somit xEy . Dies zeigt, dass E die Äquivalenz (*) erfüllt.

- (ii) \Rightarrow (iii) Falls E die Bedingung (*) erfüllt, so folgt sofort xEx (wegen $E(x) = E(x)$) und folglich überdecken die Nachbereiche $E(x)$ (wegen $x \in E(x)$) die Menge A .

Ist $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$ und z ein Element in $E(x) \cap E(y)$, so gilt xEz und yEz und daher folgt $E(x) = E(z) = E(y)$. Da also je zwei Nachbereiche $E(x)$ und $E(y)$ entweder gleich oder disjunkt sind, bildet $\{E(x) \mid x \in A\}$ sogar eine Partition von A .

- (iii) \Rightarrow (i) Wird schließlich A von den Mengen $E(x)$ partitioniert, wobei $x \in E(x)$ für alle $x \in A$ gilt, so folgt

$$xEy \Leftrightarrow y \in E(x) \cap E(y) \Leftrightarrow E(x) = E(y).$$

Daher übertragen sich die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität unmittelbar von der Gleichheitsrelation auf E . ■

Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die **Identität** Id_A , die größte die **Allrelation** $A \times A$. Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$, und die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $A/(A \times A) = \{A\}$.

Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten. Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E . Im Fall $E \subseteq E'$ sagt man auch, E bewirkt eine **feinere** Partitionierung als E' . Demnach ist die Identität die **feinste** und die Allrelation die **größte** Äquivalenzrelation.

Da der Schnitt über eine Menge von Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist, können wir für eine beliebige Relation R auf einer Menge A die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation definieren:

$$h_{\text{äq}}(R) := \bigcap \{E \mid E \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ mit } R \subseteq E\}$$

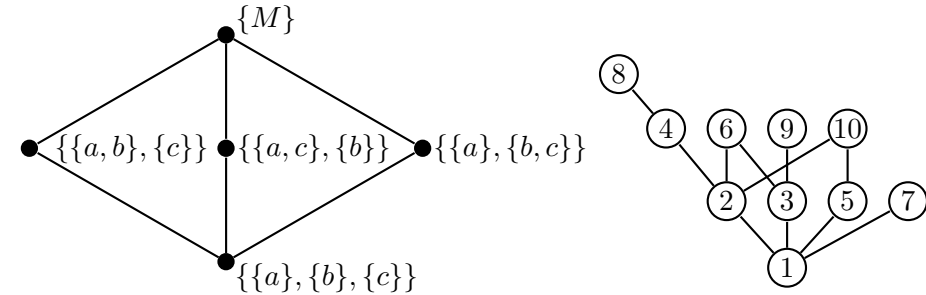
In der Sprache der Graphentheorie werden die durch die Äquivalenzklassen von $h_{\text{äq}}(R)$ induzierten Teilgraphen auch die **schwachen Zusammenhangskomponenten** des Digraphen (A, R) genannt (siehe Übungen). Als nächstes betrachten wir Ordnungen.

Definition 34. (A, R) heißt **Ordnung** (auch **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**), wenn R eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel 35.

- (\mathbb{Z}, \leq) und $(\mathbb{N}, |)$ sind Ordnungen. Erstere ist linear, letztere nicht.

- Für jede Menge M ist die relationale Struktur $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ eine Ordnung. Diese ist nur im Fall $\|M\| \leq 1$ linear.
- Auf der Menge $\mathcal{A}(M)$ aller Äquivalenzrelationen auf M die Relation "feiner als". Dabei ist, wie wir gesehen haben, E_1 eine Verfeinerung von E_2 , falls E_1 in E_2 enthalten ist. In diesem Fall bewirkt E_1 nämlich eine feinere Klasseneinteilung auf M als E_2 , da jede Äquivalenzklasse von E_1 in einer Äquivalenzklasse von E_2 enthalten ist.
- Ist R eine Ordnung auf A und $B \subseteq A$, so heißt die Ordnung $R_B = R \cap (B \times B)$ die **Einschränkung** (oder **Restriktion**) von R auf B . Beispielsweise ist $(\mathcal{A}(M); \subseteq)$ die Einschränkung von $(\mathcal{P}(M \times M); \subseteq)$ auf $\mathcal{A}(M)$. \triangleleft



Das linke Hasse-Diagramm stellt die "feiner als" Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$ dar. Rechts ist die Einschränkung der "teilt"-Relation auf die Zahlenmenge $\{1, 2, \dots, 10\}$ abgebildet. \triangleleft

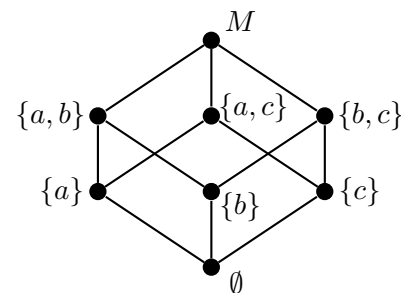
Ordnungen lassen sich sehr anschaulich durch Hasse-Diagramme darstellen. Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \cap \overline{Id}_A$. Um die Ordnung \leq in einem **Hasse-Diagramm** darzustellen, wird nur der Graph der **Nachbarrelation**

$$\triangleleft = < \setminus <^2, \text{ d.h. } x \triangleleft y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

gezeichnet. Für $x \triangleleft y$ sagt man auch, y ist **oberer Nachbar** von x . Weiterhin wird im Fall $x < y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Beispiel 36.

Die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von $M = \{a, b, c\}$ lässt sich durch nebenstehendes Hasse-Diagramm darstellen.



Definition 37. Sei \leq eine Ordnung auf A und sei b ein Element in einer Teilmenge $B \subseteq A$.

- b heißt **kleinstes Element** oder **Minimum** von B (kurz $b = \min B$), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b heißt **größtes Element** oder **Maximum** von B (kurz $b = \max B$), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b heißt **minimal** in B , falls es in B kein kleineres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b heißt **maximal** in B , falls es in B kein größeres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

Bemerkung 38. Da Ordnungen antisymmetrisch sind, kann es in jeder Teilmenge B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Die Anzahl der minimalen und maximalen Elemente in B kann dagegen beliebig groß sein.

Definition 39. Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Jedes Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt **untere** und jedes $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt **obere Schranke** von B .
- B heißt **nach oben beschränkt**, wenn B eine obere Schranke hat, und **nach unten beschränkt**, wenn B eine untere Schranke hat.
- B heißt **beschränkt**, wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Besitzt B eine größte untere Schranke i , d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i , so heißt i das **Infimum** von B (kurz $i = \inf B$):

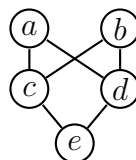
$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- Besitzt B eine kleinste obere Schranke s , d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s , so heißt s das **Supremum** von B ($s = \sup B$):

$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Bemerkung 40. B kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum haben.

Beispiel 41. Betrachte nebenstehende Ordnung auf der Menge $A = \{a, b, c, d, e\}$. Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene Teilmengen $B \subseteq A$ alle minimalen und maximalen Elemente in B Minimum und Maximum, alle unteren und oberen Schranken, sowie Infimum und Supremum von B (falls existent).



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken	inf	sup
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

◁

Bemerkung 42.

- Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen.
- So hat in der linear geordneten Menge (\mathbb{Q}, \leq) die Teilmenge

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

weder ein Supremum noch ein Infimum.

- Dagegen hat in einer linearen Ordnung jede endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.

2.4.2 Abbildungen

Definition 43. Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M .

- R heißt **rechtseindeutig**, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- R heißt **linkseindeutig**, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- Der **Nachbereich** $N(R)$ und der **Vorbereich** $V(R)$ von R sind

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R(x) \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T(x).$$

- Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt **Abbildung** oder **Funktion von A nach B** (kurz $R : A \rightarrow B$).

Bemerkung 44.

- Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben f, g, h, \dots bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der **Definitionsbereich** und die Menge B der **Wertebereich** oder **Wertevorrat** von f genannt.
- Der Nachbereich $N(f)$ wird als **Bild** von f bezeichnet.

Definition 45.

- Im Fall $N(f) = B$ heißt f **surjektiv**.
- Ist f linkseindeutig, so heißt f **injektiv**. In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.
- Eine injektive und surjektive Abbildung heißt **bijektiv**.
- Für eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist auch f^T eine Abbildung, die mit f^{-1} bezeichnet und die **inverse Abbildung** zu f genannt wird.

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

2.4.3 Homo- und Isomorphismen

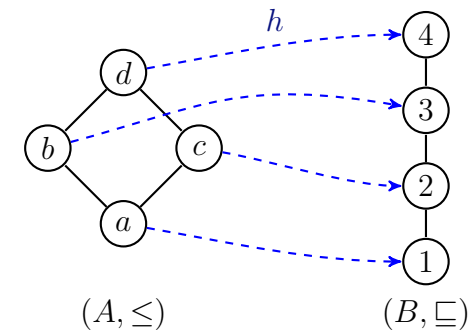
Definition 46. Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.

- Eine Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ heißt **Homomorphismus**, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

- Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man von **Ordnungshomomorphismen** oder einfach von **monotonen** Abbildungen.
- Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch **streng monotone** Abbildungen genannt.

Beispiel 47. Folgende Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.



Obwohl h ein bijektiver Homomorphismus ist, ist die Umkehrung h^{-1} kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist. Es gilt nämlich

$$2 \subseteq 3, \text{ aber } h^{-1}(2) = b \not\subseteq c = h^{-1}(3).$$

◁

Definition 48. Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \rightarrow A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

heißt **Isomorphismus**. In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) **isomorph** (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

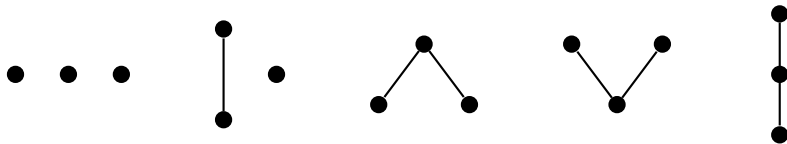
Beispiel 49.

- Die Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$h : x \mapsto e^x$$

ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen (\mathbb{R}, \leq) und (\mathbb{R}^+, \leq) .

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation \cong in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

die Menge aller Teiler von n und

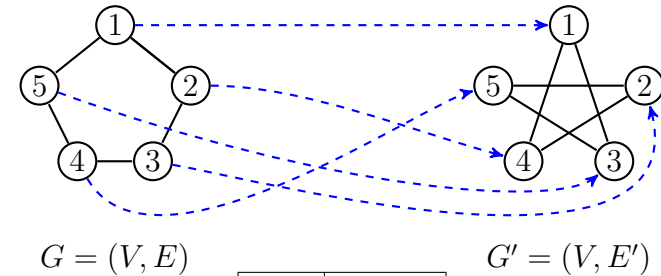
$$P_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ist Primteiler von } n\}$$

die Menge aller Primteiler von n . Dann ist die Abbildung

$$h : k \mapsto P_k$$

ein (surjektiver) Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$. h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt).

- Die beiden folgenden Graphen G und G' sind isomorph. Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2 .



v	1	2	3	4	5
$h_1(v)$	1	3	5	2	4
$h_2(v)$	1	4	2	5	3

- Während auf der Knotenmenge $V = [3]$ insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:



◁

Bemerkung 50. Auf der Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ existieren genau $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Graphen. Sei $a(n)$ die Anzahl aller nichtisomorphen Graphen auf V . Da jede Isomorphieklasse mindestens einen und höchstens $n!$ verschiedene Graphen enthält, ist $2^{\binom{n}{2}}/n! \leq a(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}$. Tatsächlich ist $a(n)$ **asymptotisch gleich** $u(n) = 2^{\binom{n}{2}}/n!$ (in Zeichen: $a(n) \sim u(n)$), d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)/u(n) = 1.$$

Also gibt es auf $V = \{1, \dots, n\}$ nicht wesentlich mehr als $u(n)$ nicht-isomorphe Graphen.