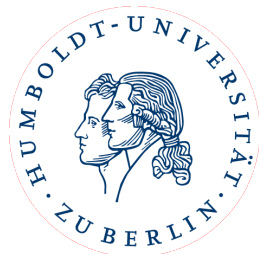
Theoretische Informatik 2

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2009/10

Termine

Vorlesung

• Di	09-11	RUD 25	3.001	J. Köbler
• Do	09-11	RUD 25	3.001	J. Köbler

Übungen

• Di	11-13	RUD 26	1'307	S. Tazari
• Di	11-13	RUD 25	3.101	W. Kössler
• Di	15-17	RUD 26	1'305	S. Tazari
• Do	11-13	RUD 26	1'307	S. Kuhnert
• Fr	09-11	RUD 25	3.113	W. Kössler

Weitere Infos unter `www.informatik.hu-berlin.de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws09/theo2`

Übungen (Anmeldung über GOYA erforderlich)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- in der VL, auf GOYA und der VL-Webseite

Bearbeitung

- in Gruppen von maximal drei Teilnehmern
- bitte Namen und Matrikelnr. angeben

Abgabe

- bis 9:10 Uhr im Erdgeschoss von Haus 4!
  (Abgabetermin s. Aufgabenblatt)
- bitte nur in Papierform

Rückgabe

- in den Übungsgruppen

Schein, Klausur, Skript

Scheinkriterien

- Lösen von $\geq 50\%$ der schriftlichen Aufgaben,
- Erfolgreiches Vorrechnen von ≥ 3 mündl. Aufgaben.

Klausur

- **Termin: 23.02.2010**
- Zulassung nur mit Übungsschein
- Nachklausur: nach dem SS 2010

Skript

- wird wöchentlich ins Netz gestellt.

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Inhalt der Vorlesung

Zentrale Themen von ThI 1:

- Mathem. Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung
  Aussagenlogik, Prädikatenlogik
- Welche Probleme sind lösbar? Berechenbarkeitstheorie

Zentrale Themen von ThI 2:

- **Welche Rechenmodelle sind adäquat?** **Automatentheorie**
- **Welcher Aufwand ist nötig?** **Komplexitätstheorie**

Zentrales Thema von ThI 3:

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? Algorithmik

Maschinenmodelle

- Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle.
- Je nach Berechnungskraft unterschiedliche math. Modelle.
- In ThI1: TM als ein universales Berechnungsmodell.
- In ThI3: Registermaschine (engl. random access machine; RAM).
- Dieses Modell ist etwas flexibler als die TM, da es den unmittelbaren Lese- und Schreibzugriff (random access) auf eine beliebige Speichereinheit (Register) erlaubt.
- Hier betrachten wir Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.
  - endliche Automaten (DFA, NFA),
  - Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Algorithmenbegriff

- Der Begriff Algorithmus geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück.
- Ältester bekannter nicht-trivialer Algorithmus:
  Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.).
- Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er bei jeder zulässigen Problemeingabe nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte Ausgabe liefert.
- Ein Algorithmus ist ein „Verfahren“ zur Lösung eines Berechnungsproblems, das sich prinzipiell auf einer Turingmaschine implementieren lässt (Church-Turing-These).
- Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein.
- Diese werden über einem Eingabealphabet Σ kodiert.

Alphabet, Wort, Sprache

Definition

- Ein Alphabet ist eine geordnete endliche Menge

  $$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}, \ m \geq 1$$

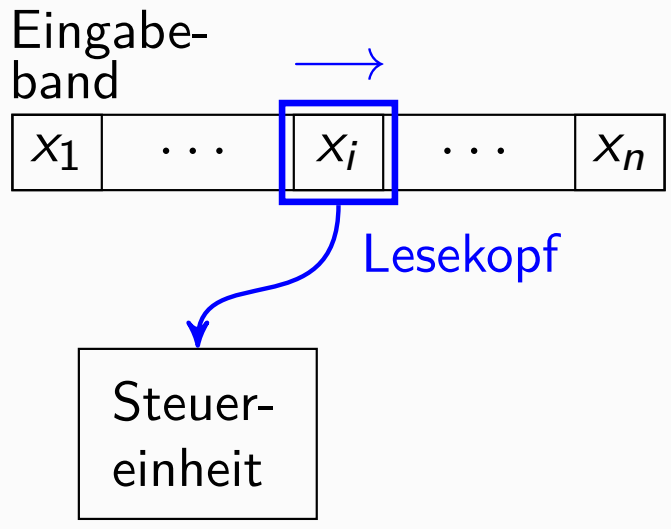
  von Zeichen a_i.
- Eine Folge $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^n$ heißt Wort (der Länge n).
- Die Menge aller Wörter über Σ ist

  $$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n.$$

- Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das leere Wort, welches wir mit ε bezeichnen.
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt Sprache über dem Alphabet Σ.

Das Rechenmodell des endlichen Automaten

Ein endlicher Automat



- ist eine „abgespeckte“ Turingmaschine,
- verfügt nur über kostant viel Speicherplatz,
- macht bei Eingaben der Länge n nur n Rechenschritte und
- liest in jedem Schritt genau ein Eingabezeichen.

Formale Definition eines endlichen Automaten

Definition

Ein endlicher Automat (kurz: DFA; *deterministic finite automaton*) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion,
- $q_0 \in Z$ der Startzustand und
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist.

Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \cdots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \ldots, n-1 \end{array} \right\}.$$

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

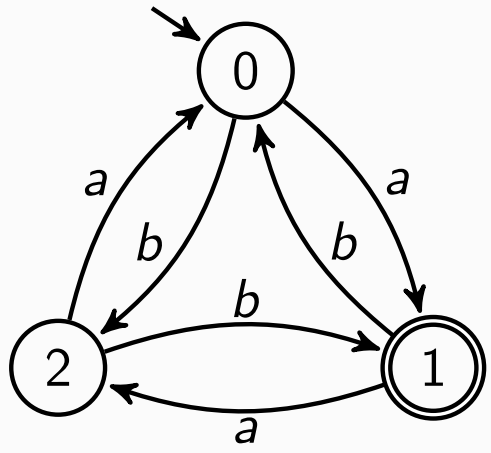
Beispiel

Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ ein DFA mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

◁

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet.

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}, \quad \text{wobei}$$

- $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen von a in x bezeichnet und
- $i \equiv_m j$ bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist.

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist $\{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$.

Beweis der Behauptung durch Induktion über die Länge von x

Wir betrachten zunächst das Erreichbarkeitsproblem für DFAs.

Frage

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$. Welchen Zustand erreicht N bei Eingabe x nach i Schritten?

Antwort

- nach 0 Schritten: q_0,
- nach 1 Schritt: $\delta(q_0, x_1)$,
- nach 2 Schritten: $\delta(\delta(q_0, x_1), x_2)$,
- nach i Schritten: $\delta(\ldots\delta(\delta(q_0, x_1), x_2), \ldots x_i)$.

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Definition

- Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird.
- Dann können wir die Funktion

  $$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

  induktiv (über die Länge von x) wie folgt definieren.
- Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

  $$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

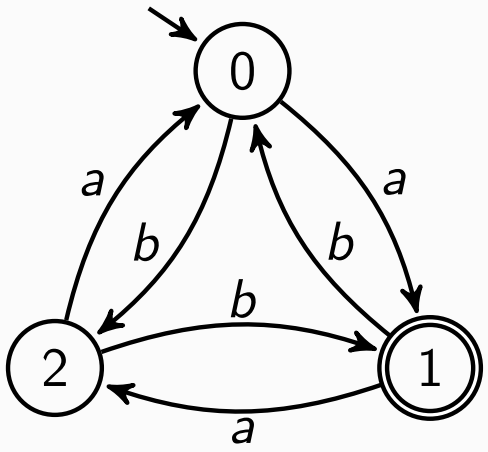
- Die von M erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

  schreiben.

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

M_3



Behauptung

$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$.

Beweis

- 1 ist der einzige Endzustand von M.
- Daher ist $L(M_3) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$.
- Folglich reicht es, folgende Kongruenzgleichung zu zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$$

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Beweis von $\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$:

Wir führen Induktion über die Länge n von x.

Induktionsanfang $n = 0$: klar, da $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n + 1$:

- Sei $x = x_1 \cdots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \cdots x_n)$.
- Nach IV ist

  $$i \equiv_3 \#_a(x_1 \cdots x_n) - \#_b(x_1 \cdots x_n).$$

- Wegen $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$ und $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$ folgt

  $$\delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) = \#_a(x) - \#_b(x).$$

- Folglich ist

  $$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \cdots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

□

Die Klasse der regulären Sprachen

Definition

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als regulär bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Frage

Welche Sprachen gehören zu REG und welche nicht?

Singletons sind regulär

Vereinbarung

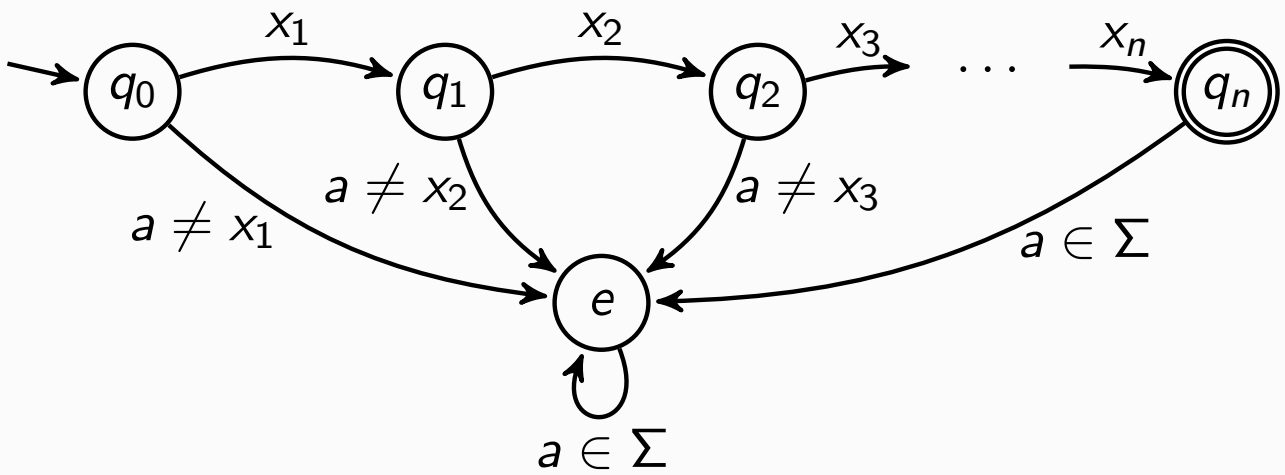
Für das Folgende sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein fest gewähltes Alphabet.

Beobachtung 1

Alle Sprachen, die nur ein Wort $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ enthalten, sind regulär.

Beweis

Folgender DFA M erkennt die Sprache $L(M) = \{x\}$:



□

Abschlusseigenschaften von Sprachklassen

Definition

Ein (k-stelliger) Sprachoperator ist eine Abbildung op, die k Sprachen $L_1, \ldots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \ldots, L_k)$ abbildet.

Beispiel

Der 2-stellige Schnittoperator bildet zwei Sprachen L_1 und L_2 auf die Sprache $L_1 \cap L_2$ ab. $\triangleleft$

Definition

- Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter op abgeschlossen, wenn gilt:

$$L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \ldots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

- Der Abschluss von $\mathcal{K}$ unter op ist die kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter op abgeschlossen ist.

Reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen

Beobachtung 2

Ist $L \in \text{REG}$, so ist auch die Sprache $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ regulär.

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann akzeptiert der DFA

$$\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, q_0, Z \setminus E)$$

das Komplement $\overline{L}$ von L. □

Reguläre Sprachen sind unter Durchschnitt abgeschlossen

Beobachtung 3

Sind $L_1, L_2 \in \text{REG}$, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis

- Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_i, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Dann wird der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

erkannt.

□

Reguläre Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen

Beobachtung 4

Die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ von regulären Sprachen L_1 und L_2 ist regulär.

Beweis

Es gilt $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$. □

Frage

Wie sieht der zugehörige DFA aus?

Antwort

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), (E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)).$$

REG ist unter Mengenoperationen abgeschlossen

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung.

Wie umfangreich ist REG?

Folgerung

- Aus den Beobachtungen folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind.
- Da die reguläre Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Konstruktive Charakterisierung von REG

Frage

Lassen sich alle regulären Sprachen aus endlichen Sprachen mithilfe von einfachen Operationen gewinnen?

Definition

- Das Produkt (Verkettung, Konkatenation) der Sprachen L_1 und L_2 ist
  $$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}.$$
- Ist $L_1 = \{x\}$ einelementig (diese Sprachen werden auch als Singletonsprachen bezeichnet), so schreiben wir für $\{x\}L_2$ auch einfach xL_2.
- Die n-fache Potenz L^n einer Sprache L ist induktiv definiert durch
  $$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ L^{n-1}L, & n > 0. \end{cases}$$
- Die Sternhülle von L ist $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.
- Die Plushülle von L ist $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = LL^*$.

Überblick

Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endl. Sprachen unter Vereinigung, Produktbildung und Sternhülle charakterisierbar ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee

Ein nichtdeterministischer Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „erraten“.

Verbleibendes Problem

Zeige, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen.

Nichtdeterministische Automaten

Definition

- Ein nichtdet. endl. Automat (kurz: NFA; *nondet. finite automaton*)

  $$N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$$

  ist genau so aufgebaut wie ein DFA, nur dass er
  - eine Menge $Q_0 \subseteq Z$ von Startzuständen hat und
  - die Überführungsfunktion folgende Form hat:

    $$\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z).$$

  - Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen) von Z. Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet.
- Die von einem NFA N akzeptierte Sprache ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \cdots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_0 \in Q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ q_{i+1} \in \delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \ldots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Eigenschaften von NFAs

- Ein NFA N kann also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen.
- Die Eingabe x wird genau dann akzeptiert, wenn mind. eine Rechnung von N nach Lesen von x einen Endzustand erreicht.
- Im Gegensatz zu einem DFA, der jede Eingabe zu Ende liest, kann ein NFA N „stecken bleiben“.
- Dieser Fall tritt ein, wenn N in einen Zustand q gelangt, in dem er das nächste Eingabezeichen x_i wegen

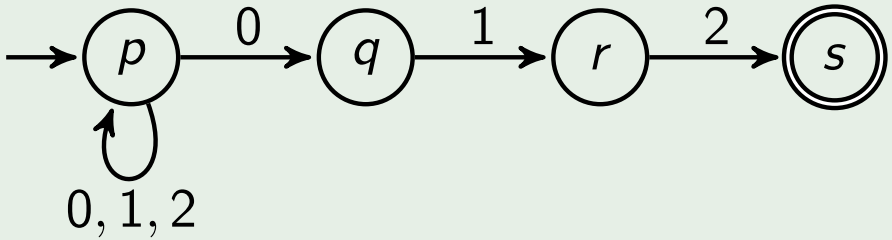
  $$\delta(q, x_i) = \emptyset$$

  nicht verarbeiten kann.

Eigenschaften von NFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA N,



d.h. $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ mit $Z = \{p, q, r, s\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $Q_0 = \{p\}$, $E = \{s\}$ und der Überführungsfunktion

δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{p\}$	$\emptyset$	$\{s\}$	$\emptyset$

- Dann ist $L(M) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ die Sprache aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. ◁

Eigenschaften von NFAs

Beobachtung 5

Seien $N_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$ NFAs mit $L(N_i) = L_i$ für $i = 1, 2$. Dann wird auch das Produkt $L_1 L_2$ von einem NFA erkannt.

Beweis

- Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ annehmen.
- Die Sprache $L_1 L_2$ wird dann von dem NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, Q_1, E)$ mit

$$\delta(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_1 \cup E_2, & Q_2 \cap E_2 \neq \emptyset \\ E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

akzeptiert.

□

Eigenschaften von NFAs

Beobachtung 6

Ist $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA, so wird auch die Sprache $L(N)^*$ von einem NFA erkannt.

Beweis

Die Sprache $L(N)^*$ wird von dem NFA

$$N^* = (Z \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta^*, Q_0 \cup \{q_{neu}\}, E \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta^*(p, a) = \begin{cases} \delta(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, a), & p \in E, \\ \delta(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

erkannt. □

Überblick

Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endl. Sprachen unter Vereinigung, Produktbildung und Sternhülle charakterisierbar ist.

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden.

Lösungsidee (bereits umgesetzt)

Ein nichtdeterministischer Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „erraten“.

Noch zu zeigen

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen.

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Satz (Rabin und Scott)

$\mathrm{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$.

Beweis von $\mathrm{REG} \subseteq \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Diese Inklusion ist klar, da jeder DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ leicht in einen äquivalenten NFA

$$N = (Z, \Sigma, \bar{\delta}, Q_0, E)$$

transformiert werden kann, indem wir $\bar{\delta}(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ und $Q_0 = \{q_0\}$ setzen. □

Für die umgekehrte Inklusion ist das Erreichbarkeitsproblem für NFAs von zentraler Bedeutung.

Das Erreichbarkeitsproblem für NFAs

Frage

Sei $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$. Welche Zustände kann $N(x)$ in i Schritten erreichen?

Antwort

- in 0 Schritten: alle Zustände in Q_0.
- in einem Schritt: alle Zustände in

$$Q_1 = \bigcup_{q \in Q_0} \delta(q, x_1).$$

- in i Schritten: alle Zustände in

$$Q_i = \bigcup_{q \in Q_{i-1}} \delta(q, x_i).$$

Simulation von NFAs durch DFAs

Idee

- Wir können einen NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ durch einen DFA M simulieren, der in seinem Zustand die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte.
- Die Zustände von M sind also Teilmengen Q von Z mit Q_0 als Startzustand und der Endzustandsmenge

  $$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\}.$$

- Die Überführungsfunktion $\delta' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ von M berechnet dann für einen Zustand $Q \subseteq Z$ und ein Zeichen $a \in \Sigma$ die Menge

  $$\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a)$$

  aller Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest.
- Die von $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$ erkannte Sprache ist

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset\}.$$

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Beweis von $\{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\} \subseteq \text{REG}$

- Sei $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$ der zugehörige Potenzmengenautomat mit $\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a)$ und $E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$.
- Dann folgt die Korrektheit von M leicht mittels folgender Behauptung, deren Beweis wir auf der nächsten Folie nachholen.

Behauptung

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

- Für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt

$$
\begin{aligned}
x \in L(N) &\quad\Leftrightarrow\quad N \text{ kann nach Lesen von } x \text{ einen Endzustand erreichen} \\
&\overset{\text{Beh.}}{\Leftrightarrow}\quad \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \hat{\delta}'(Q_0, x) \in E' \\
&\quad\Leftrightarrow\quad x \in L(M).
\end{aligned}
$$

□

Beweis der Behauptung

Behauptung

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände.

Beweis durch Induktion über die Länge n von x

$n = 0$: klar, da $\hat{\delta}'(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Sei $x = x_1 \cdots x_n$ gegeben. Nach IV enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}'(Q_0, x_1 \cdots x_{n-1})$$

die Zustände, die N nach Lesen von $x_1 \cdots x_{n-1}$ erreichen kann. Wegen

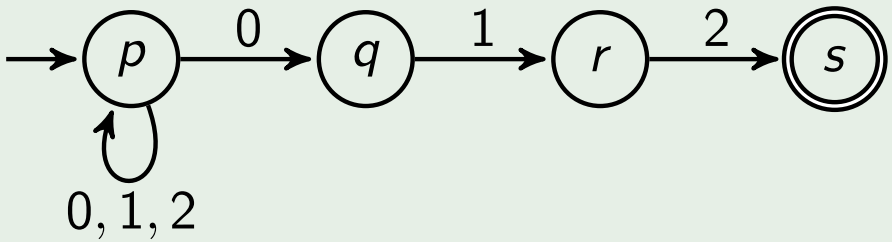
$$\hat{\delta}'(Q_0, x) = \delta'(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}'(Q_0, x)$ die Zustände, die N nach Lesen von x erreichen kann. □

Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA N



  mit Startzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und Endzustandsmenge $E = \{s\}$.

- Ausgehend von Q_0 liefert δ' dann die folgenden Werte:

δ'	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$

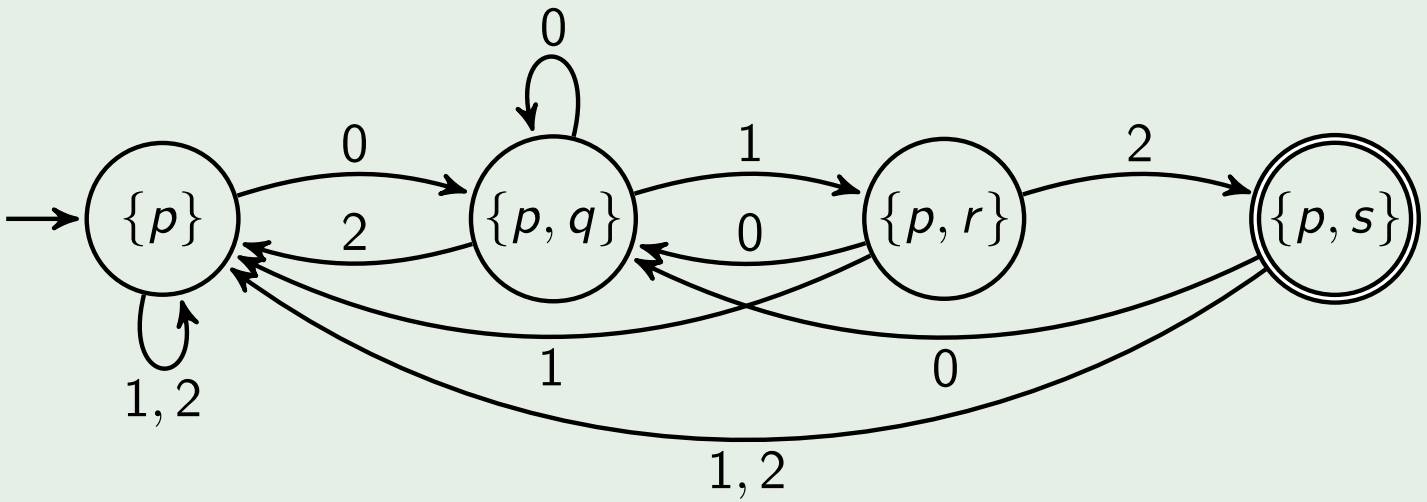
Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Ausgehend von Q_0 liefert δ' dann die folgenden Werte:

δ'	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$

- Also ist N äquivalent zu folgendem Potenzmengenautomaten M:



◁

Simulation von NFAs durch DFAs

Bemerkung

- Im obigen Beispiel werden für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten nur 4 der insgesamt

$$\|\mathcal{P}(Z)\| = 2^{\|Z\|} = 2^4 = 16$$

  Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände nicht erreichbar sind.
- Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände benötigt werden (siehe Übungen).

Abschlusseigenschaften der Klasse REG

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

Überblick

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endl. Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar ist.

Bereits gezeigt:

Jede Sprache, die mittels der Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle (sowie Durchschnitt und Komplement) angewandt auf endliche Sprachen darstellbar ist, ist regulär.

Noch zu zeigen:

Jede reguläre Sprache lässt sich aus endlichen Sprachen mittels Vereinigung, Produkt und Sternhülle erzeugen.

Konstruktive Charakterisierung von REG mittels regulärer Ausdrücke

Induktive Definition der Menge *RA* aller regulären Ausdrücke

Die Symbole $\emptyset$, ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke, die

- die leere Sprache $L(\emptyset) = \emptyset$,
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\varepsilon\}$ und
- für jedes $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$ beschreiben.

Sind α und β reguläre Ausdrücke, die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke, die folgende Sprachen beschreiben:

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$,
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$.

Reguläre Ausdrücke

Beispiel

Die regulären Ausdrücke ϵ^*, $\emptyset^*$, $(0|1)^*00$ und $(\epsilon 0|\emptyset 1^*)$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	ϵ^*	$\emptyset^*$	$(0\|1)^*00$	$(\epsilon 0\|\emptyset 1^*)$
$L(\gamma)$	$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$	$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

◁

Vereinbarungen

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende Präzedenzordnung: Der Sternoperator * bindet stärker als der Produktoperater und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator.
- Für $((a|b(c)^*)|d)$ können wir also kurz $a|bc^*|d$ schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$.

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Satz

$\{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\} \subseteq$ REG.

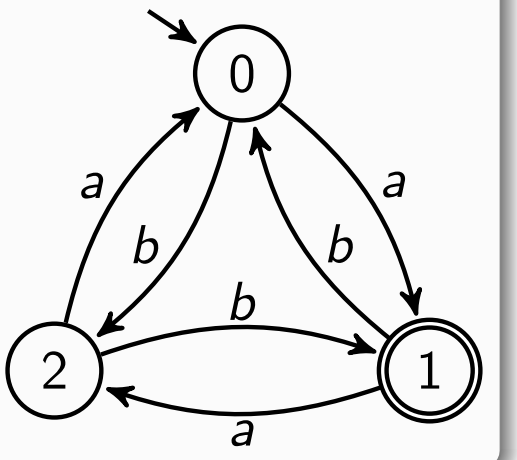
Beweis.

Klar, da

- die Basisausdrücke $\emptyset$, ϵ und a, $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und
- die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist. $\square$

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

M_3:



Frage

Wie lässt sich die Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

durch einen regulären Ausdruck beschreiben?

Antwort

- Die Sprache $L_0 = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 0\}$ lässt sich durch folgenden regulären Ausdruck beschreiben:

$$\gamma_0 = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*.$$

- Also ist $L(M_3)$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreibbar:

$$\gamma_1 = \gamma_0(a|bb)(ab)^*.$$

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$.

Beweis

- Wir konstruieren zu einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$.
- Wir nehmen an, dass $Z = \{1, \ldots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist.
- Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form $L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$ darstellen.

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ anzugeben.

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$.

Beweis (Fortsetzung)

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ anzugeben.
- Hierzu betrachten wir für $r = 0, \ldots, m$ die Sprachen

$$L^r_{p,q} = \left\{ x \in L_{p,q} \,\middle|\, \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \text{ ist } \hat{\delta}(p, x_1 \cdots x_i) \leq r \right\}.$$

- Wegen $L_{p,q} = L^m_{p,q}$ reicht es, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L^r_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ und $0 \leq r \leq m$ anzugeben.
- Wir zeigen induktiv über r, dass die Sprachen $L^r_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$.

Beweis (Schluss)

- Wir zeigen induktiv über r, dass die Sprachen $L^r_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

  $r = 0$: In diesem Fall sind die Sprachen

  $$L^0_{p,q} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\}, & p \neq q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

  endlich und somit durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

  $r \rightsquigarrow r+1$: Wegen

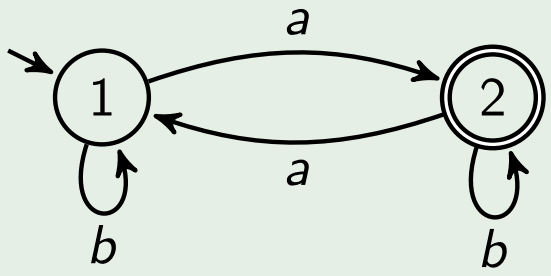
  $$L^{r+1}_{p,q} = L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}$$

  sind mit $L^r_{p,q}$, $1 \leq p,q \leq m$, auch die Sprachen $L^{r+1}_{p,q}$, $1 \leq p,q \leq m$, durch reguläre Ausdrücke beschreibbar. $\square$

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L^2_{1,2}.$$

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

- Um reguläre Ausdrücke $\gamma^r_{p,q}$ für die Sprachen $L^r_{p,q}$ zu bestimmen, benutzen wir für $r \geq 0$ die Rekursionsformel

$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1} (\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}.$$

- Damit erhalten wir

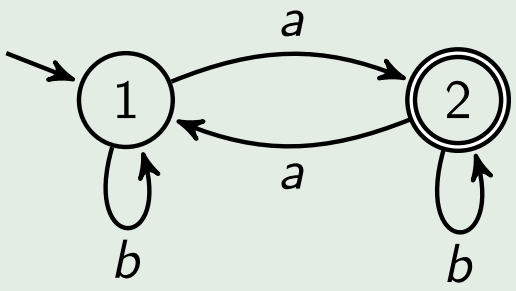
$$\begin{aligned}
\gamma^2_{1,2} &= \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}, \\
\gamma^1_{1,2} &= \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}, \\
\gamma^1_{2,2} &= \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}.
\end{aligned}$$

- Es genügt also, die regulären Ausdrücke $\gamma^0_{1,1}$, $\gamma^0_{1,2}$, $\gamma^0_{2,1}$, $\gamma^0_{2,2}$, $\gamma^1_{1,2}$, $\gamma^1_{2,2}$ und $\gamma^2_{1,2}$ zu berechnen.

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$L^0_{p,p} = \{a \mid \delta(p,a) = p\} \cup \{\varepsilon\},$$

$$L^0_{p,q} = \{a \mid \delta(p,a) = q\} \text{ für } p \neq q,$$

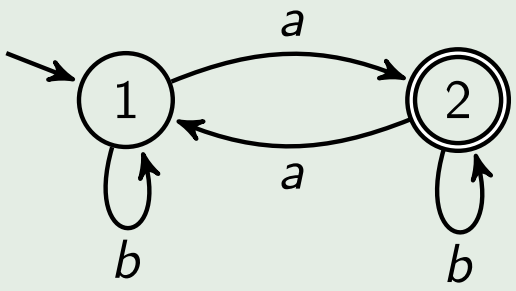
$$L^{r+1}_{p,q} = L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}.$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$				
$r=1$				
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

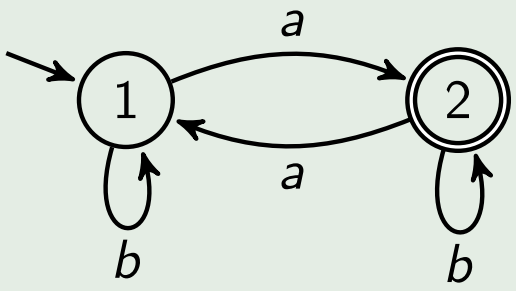
$$L^0_{1,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1, a) = 1\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$				
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{1,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1,a) = 1\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

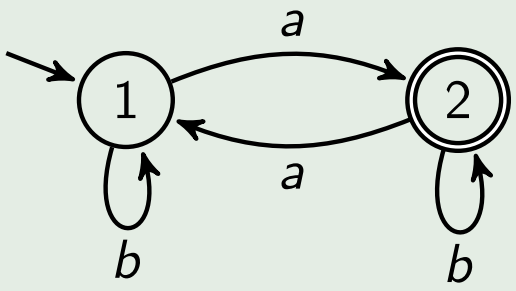
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{1,1} = \epsilon | b$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$			
$r=1$				
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

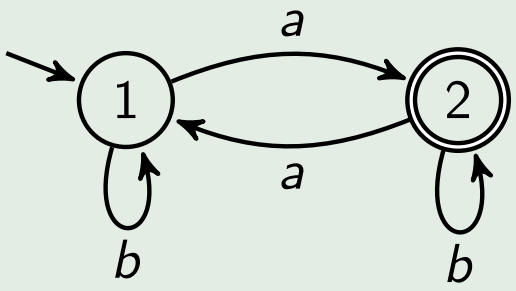
$$L^0_{1,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1, a) = 2\} = \{a\}$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$	$\epsilon \mid b$			
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{1,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(1, a) = 2\} = \{a\}$$

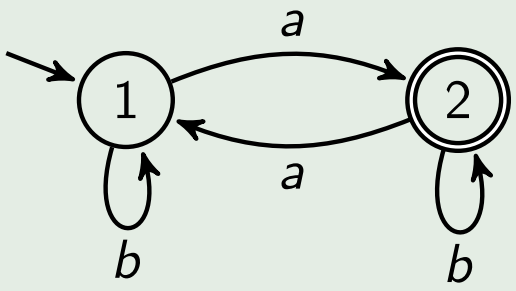
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{1,2} = a$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$	$\epsilon \mid b$	a		
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

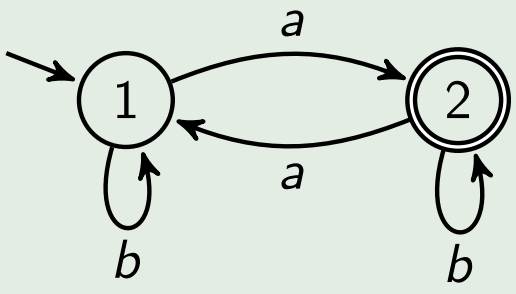
$$L^0_{2,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2, a) = 1\} = \{a\}$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$	$\epsilon \mid b$	a		
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{2,1} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2, a) = 1\} = \{a\}$$

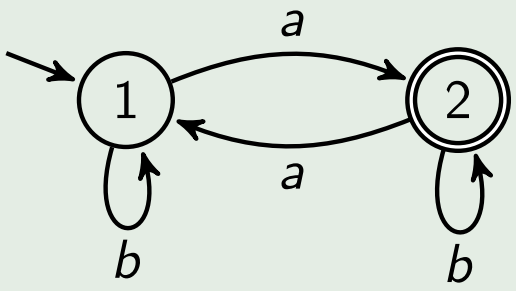
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,1} = a$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$	$\epsilon \mid b$	a	a	
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

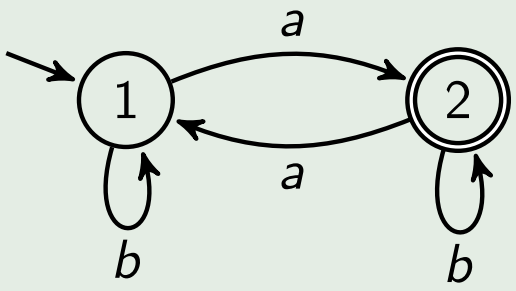
$$L^0_{2,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2, a) = 2\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

(p, q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r = 0$	$\epsilon \mid b$	a	a	
$r = 1$				
$r = 2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{2,2} = \{a \in \Sigma \mid \delta(2,a) = 2\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

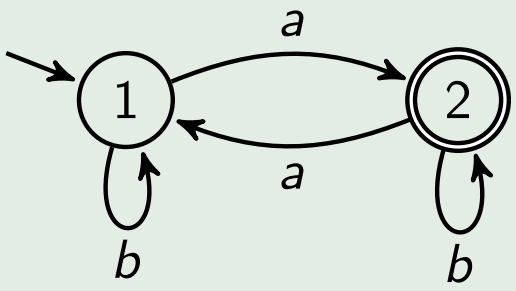
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,2} = \epsilon|b$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
$r=1$	-			
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

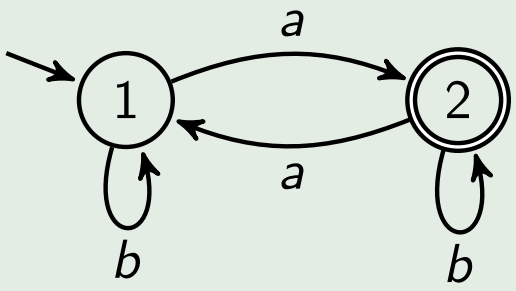
$$\gamma^{1}_{1,2} = \gamma^{0}_{1,2} | \gamma^{0}_{1,1} (\gamma^{0}_{1,1})^{*} \gamma^{0}_{1,2}$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-			
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

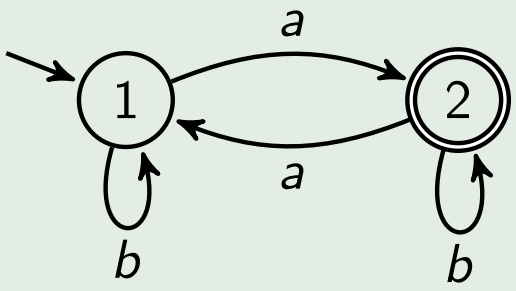
$$\gamma^1_{1,2} = \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}$$
$$= a | (\epsilon | b)(\epsilon | b)^* a$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-			
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

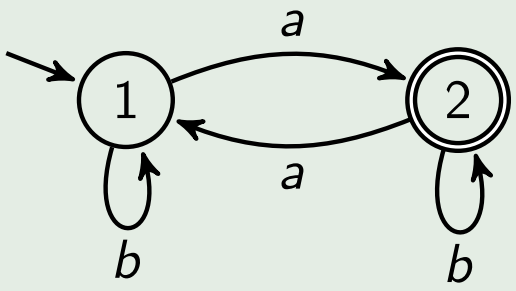
$$\gamma^1_{1,2} = \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}$$
$$= a | (\epsilon | b)(\epsilon | b)^* a$$
$$\equiv b^* a$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	b^*a	-	
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

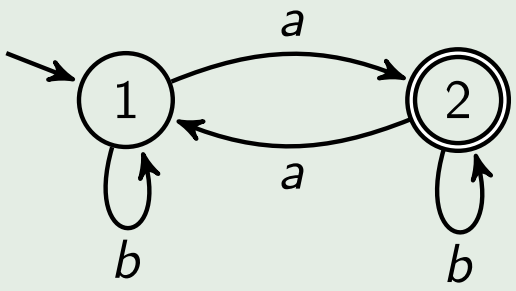
$$\gamma^{1}_{2,2} = \gamma^{0}_{2,2} | \gamma^{0}_{2,1} (\gamma^{0}_{1,1})^{*} \gamma^{0}_{1,2}$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	$b^{*}a$	-	
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

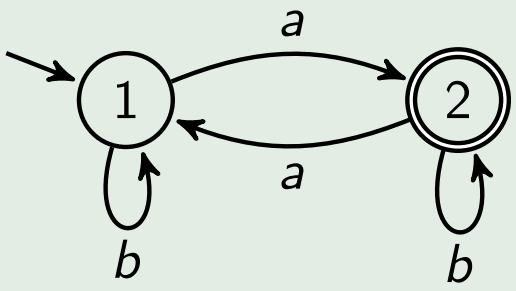
$$\gamma^1_{2,2} = \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}$$
$$= (\epsilon | b) | a (\epsilon | b)^* a$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	b^*a	-	
$r=2$				

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

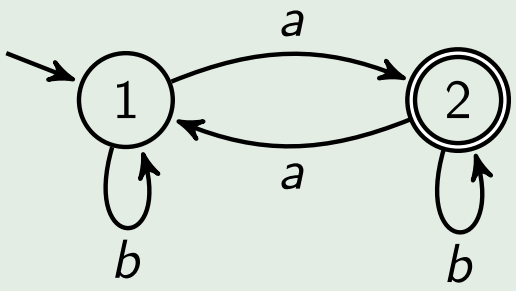
$$\gamma^1_{2,2} = \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}$$
$$= (\epsilon | b) | a (\epsilon | b)^* a$$
$$\equiv \epsilon | b | a b^* a$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	b^*a	-	$\epsilon \mid b \mid ab^*a$
$r=2$	-			

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

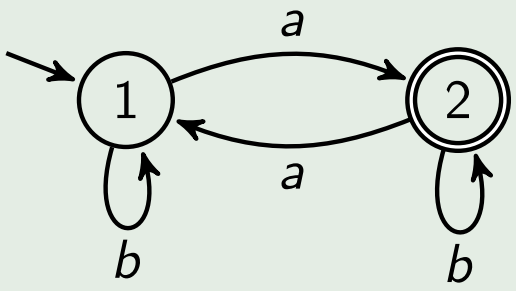
$$\gamma^2_{1,2} = \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	b^*a	-	$\epsilon \mid b \mid ab^*a$
$r=2$	-			

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

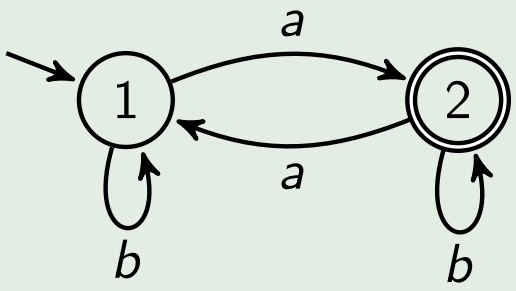
$$\gamma^2_{1,2} = \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}$$
$$= b^* a | b^* a (\epsilon | b | a b^* a)^* (\epsilon | b | a b^* a)$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	$b^* a$	-	$\epsilon \mid b \mid a b^* a$
$r=2$	-			

Charakterisierung von REG durch reg. Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$\gamma^2_{1,2} = \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}$$
$$= b^* a | b^* a (\epsilon | b | a b^* a)^* (\epsilon | b | a b^* a)$$
$$\equiv b^* a (b | a b^* a)^*$$

(p,q)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$r=0$	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
$r=1$	-	$b^* a$	-	$\epsilon \mid b \mid a b^* a$
$r=2$	-	$b^* a (b \mid a b^* a)^*$	-	-

◁

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- L lässt sich mit den Operationen $\cap$, $\cup$, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Ausblick

- Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Anzahl der Zustände eines DFA minimieren lässt.
- Da hierbei Äquivalenzrelationen eine wichtige Rolle spielen, befassen wir uns zunächst mit Relationalstrukturen.

Relationalstrukturen

Definition

- Sei A eine nichtleere Menge, R ist eine k-stellige Relation auf A, wenn $R \subseteq A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k\text{-mal}}$ ist.
- Für $i = 1, \ldots, n$ sei R_i eine k_i-stellige Relation auf A. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ Relationalstruktur.
- Die Menge A heißt der Individuenbereich, die Trägermenge oder die Grundmenge der Relationalstruktur.

Bemerkung

- Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten.
- Man nennt dann R eine (binäre) Relation auf A.
- Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die Infix-Schreibweise aRb benutzt.

Relationalstrukturen

Beispiel

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und

  $$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\},$$

- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner }\}$ und

  $$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\},$$

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei M eine beliebige Menge und $\subseteq$ die Inklusionsrelation auf den Teilmengen von M ist,
- (A, Id_A) mit $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (die Identität auf A),
- $(\mathbb{R}, \leq)$,
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet,
- $(Fml, \Rightarrow)$ mit $Fml = \{F \mid F \text{ ist aussagenlogische Formel}\}$ und

  $$\Rightarrow = \{(F, G) \in Fml \times Fml \mid G \text{ ist log. Folgerung von } F\}.$$

◁

Mengentheoretische Operationen auf Relationen

- Da Relationen Mengen sind, können wir den Durchschnitt, die Vereinigung, die Differenz und das Komplement von Relationen bilden:

$$R \cap S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\},$$
$$R \cup S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\},$$
$$R - S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\},$$
$$\overline{R} = (A \times A) - R.$$

- Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A. Dann sind der Schnitt über $\mathcal{M}$ und die Vereinigung über $\mathcal{M}$ folgende Relationen:

$$\bigcap \mathcal{M} = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\},$$
$$\bigcup \mathcal{M} = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}.$$

- Weiterhin ist die Inklusion $R \subseteq S$ auf Relationen definiert. Es gilt

$$R \subseteq S \Leftrightarrow \forall x, y : xRy \rightarrow xSy.$$

Weitere Operationen auf Relationen

Definition

- Die transponierte (konverse) Relation zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

- R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet.
- Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.
- Das Produkt (oder die Komposition) zweier Relationen R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. $\triangleleft$

Das Relationenprodukt

Notation

- Für $R \circ S$ wird auch $R;S$, $R \cdot S$ oder einfach RS geschrieben.
- Für $\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{\text{n-mal}}$ schreiben wir auch R^n. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht!

Das Relationenprodukt R^n sollte nicht mit dem kartesischen Produkt

$$\underbrace{R \times \cdots \times R}_{\text{n-mal}}$$

verwechselt werden.

Vereinbarung

Wir vereinbaren, dass R^n das n-fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Sei R eine Relation auf A. Dann heißt R

reflexiv,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Eigenschaften von Relationen

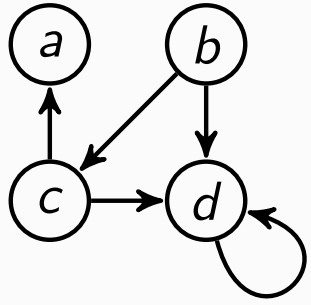
Beispiel

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist auch konnex.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist zwar im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex. $\triangleleft$

Darstellung von endlichen Relationen

Graphische Darstellung

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$



- Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen gerichteten Graphen (kurz Digraphen) $G = (A, R)$ mit Knotenmenge A und Kantenmenge R veranschaulicht werden.
- Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil).
- Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent oder benachbart.

Darstellung von endlichen Relationen

Definition

Sei R eine binäre Relation auf A.

- Der Nachbereich von x ist
$$R(x) = \{y \in A \mid xRy\}.$$
- Der Ausgangsgrad eines Knotens x ist
$$\deg^+(x) = \|R(x)\|.$$
- Der Eingangsgrad von x ist
$$\deg^-(x) = \|\{y \in A \mid yRx\}\| = \|R^{-1}(x)\|.$$
- Ist R symmetrisch, so können wir die Pfeilspitzen auch weglassen.
- In diesem Fall ist $\deg(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der Grad von x in G.
- G ist schleifenfrei, falls R irreflexiv ist.
- Ist R irreflexiv und symmetrisch, so nennen wir G einen (ungerichteten) Graphen.

Darstellung von endlichen Relationen

Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ lässt sich auch durch die boolesche $(n \times n)$-Matrix $M_R = (m_{ij})$ darstellen mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Die Relation $R = \{(b,c),(b,d),(c,a),(c,d),(d,d)\}$ auf $A = \{a,b,c,d\}$ hat beispielsweise die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁

Darstellung von endlichen Relationen

Tabellendarstellung (Adjazenzliste)

R lässt sich auch durch eine Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seinen Nachbereich $R(x)$ in Form einer Liste zuordnet.

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ hat beispielsweise die Tabellendarstellung

x	$R(x)$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

◁

Berechnung des Relationenprodukts

Berechnung von $R \circ S$

- Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$-Matrizen für R und S, so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1,\ldots,n} (r_{ik} \wedge s_{kj}).$$

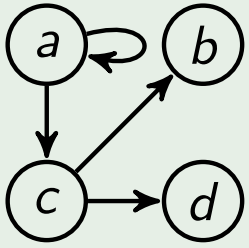
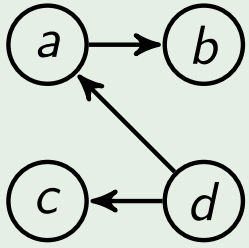
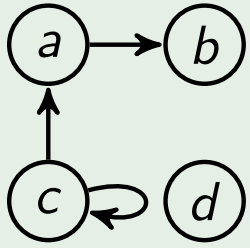
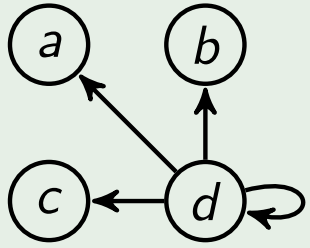
- Der Nachbereich $T(x)$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T(x) = \bigcup_{y \in R(x)} S(y).$$

Das Relationenprodukt

Beispiel

Betrachte die Relationen $R = \{(a,a),(a,c),(c,b),(c,d)\}$ und $S = \{(a,b),(d,a),(d,c)\}$ auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$.

	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenz-matrix	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
Adjazenz-liste	a : a, c b : - c : b, d d : -	a : b b : - c : - d : a, c	a : b b : - c : a, c d : -	a : - b : - c : - d : a, b, c, d

◁

Das Relationenprodukt

Beobachtung

Das Relationenprodukt ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Relationenalgebra

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationenprodukt $\circ$ als binärer Operation und der Relation Id_A als neutralem Element eine Halbgruppe (oder Monoid) bildet.

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt

1. $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. $\circ$ ist assoziativ,
2. $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Relationenalgebra

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt

1. $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. $\circ$ ist assoziativ,
2. $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Beweis.

1. $$\begin{aligned} x\ (Q \circ R) \circ S\ y &\Leftrightarrow \exists u : x\ (Q \circ R)\ u\ \wedge\ u\ S\ y \\ &\Leftrightarrow \exists u : (\exists v : x\ Q\ v\ R\ u)\ \wedge\ u\ S\ y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v : x\ Q\ v\ R\ u\ S\ y \\ &\Leftrightarrow \exists v : x\ Q\ v\ \wedge\ (\exists u : v\ R\ u\ \wedge\ u\ S\ y) \\ &\Leftrightarrow \exists v : x\ Q\ v\ (R \circ S)\ y \\ &\Leftrightarrow x\ Q \circ (R \circ S)\ y \end{aligned}$$
2. Wegen $x\ Id \circ R\ y \Leftrightarrow \exists z : x = z\ \wedge\ z\ R\ y \Leftrightarrow x\ R\ y$ folgt $Id \circ R = R$. Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog. □

Hüllenoperatoren

Bemerkung

- Es ist leicht zu sehen, dass der Schnitt von transitiven Relationen ebenfalls transitiv ist.
- Die transitive Hülle von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- R^+ ist also eine transitive Relation, die R enthält.
- Da R^+ zudem in jeder Relation mit diesen Eigenschaften enthalten ist, ist R^+ die kleinste transitive Relation, die R enthält.
- Da auch die Reflexivität und die Symmetrie bei der Schnittbildung erhalten bleiben, lassen sich nach demselben Muster weitere Hüllenoperatoren definieren.

Weitere Hüllenoperatoren

Bemerkung

- Die reflexive Hülle von R ist

$$h_{\text{refl}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die symmetrische Hülle von R ist

$$h_{\text{sym}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die reflexiv-transitive Hülle von R ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

Transitive und reflexive Hülle

Satz

$h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$, $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$, $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$, $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.

Beweis

Siehe Übungen. □

Bemerkung

- Ein Paar (a, b) ist also genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R enthalten, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$.
- Dies bedeutet, dass es Elemente $x_0, \ldots, x_n \in A$ gibt mit

$$x_0 = a,\ x_n = b \text{ und } x_0 R x_1 R x_2 \cdots x_{n-1} R x_n.$$

- $x_0, \ldots, x_n$ heißt Weg der Länge n von a nach b.

Überblick über Relationalstrukturen

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

Bemerkung

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

- Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie".
- Auf $\mathbb{Z}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m".
- Auf der Menge aller aussagenlogischen Formeln die semantische Äquivalenz. ◁

Äquivalenzrelationen

Definition

- Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man den Nachbereich $E(x)$ die von x repräsentierte Äquivalenzklasse und bezeichnet ihn auch mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$:

$$[x]_E = [x] = \{x' \mid xEx'\}.$$

- Die durch E induzierte Zerlegung (Partition) $\{[x]_E \mid x \in A\}$ von A wird Quotienten- oder Faktormenge genannt und mit A/E bezeichnet:

$$A/E = \{[x]_E \mid x \in A\}.$$

- Die Anzahl $\|A/E\|$ der Äquivalenzklassen von E wird auch als der Index von E bezeichnet.
- Eine Menge $S \subseteq A$ heißt Repräsentantensystem, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Äquivalenzrelationen

Beispiel

Für die weiter oben betrachteten Äquivalenzrelationen erhalten wir folgende Klasseneinteilungen:

- Für die Parallelität auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$:
  alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bilden jeweils eine Äquivalenzklasse.
- Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.
- Für die Relation "im gleichen Jahr geboren wie" auf der Menge aller Menschen: jeder Jahrgang bildet eine Äquivalenzklasse.
- Für die Relation "gleicher Rest bei Division durch m" auf $\mathbb{Z}$:
  jede der m Restklassen $[0], [1], \ldots, [m-1]$ mit

  $$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod m = r\}$$

  bildet eine Äquivalenzklasse.
- Repräsentantensystem: $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. ◁

Partition einer Menge

Definition

Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $M_i \subseteq A$ heißt Partition der Menge A, falls gilt:

- die Mengen M_i überdecken A, d.h. $A = \bigcup_{i \in I} M_i$ und
- die Mengen M_i sind paarweise disjunkt, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $M_i \neq M_j$ gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$.

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$,
3. E ist reflexiv und $\{E(x) \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Charakterisierung von Äquivalenzrelationen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$,
3. E ist reflexiv und $\{E(x) \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

1 impliziert 2: Sei E eine Äquivalenzrelation auf A.
Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E(y) \subseteq E(x)$:

$$z \in E(y) \Rightarrow yEz \Rightarrow xEz \Rightarrow z \in E(x).$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E(x) \subseteq E(y)$.

Umgekehrt folgt aus $E(x) = E(y)$ wegen der Reflexivität von E, dass $x \in E(x) = E(y)$ enthalten ist, und somit xEy.

Charakterisierung von Äquivalenzrelationen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$,
3. E ist reflexiv und $\{E(x) \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

2 impliziert 3: Falls E die Bedingung $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$ erfüllt, so folgt sofort xEx (wegen $E(x) = E(x)$) und folglich überdecken die Nachbereiche $E(x)$ (wegen $x \in E(x)$) die Menge A.

Ist $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$ und z ein Element in $E(x) \cap E(y)$, so gilt xEz und yEz und daher folgt $E(x) = E(z) = E(y)$.

Da also je zwei Nachbereiche $E(x)$ und $E(y)$ entweder gleich oder disjunkt sind, bildet $\{E(x) \mid x \in A\}$ sogar eine Partition von A.

Charakterisierung von Äquivalenzrelationen

Satz

Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. E ist eine Äquivalenzrelation auf A.
2. Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$,
3. E ist reflexiv und $\{E(x) \mid x \in A\}$ ist eine Partition von A.

Beweis.

3 impliziert 1: Wird schließlich A von den Mengen $E(x)$ partitioniert, wobei $x \in E(x)$ für alle $x \in A$ gilt, so folgt

$$xEy \Leftrightarrow y \in E(x) \cap E(y) \Leftrightarrow E(x) = E(y).$$

Daher übertragen sich die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität unmittelbar von der Gleichheitsrelation auf E. □

Verfeinerung und Vergröberung von Äquivalenzrelationen

Bemerkungen

- Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die Identität Id_A, die größte ist die Allrelation $A \times A$.
- Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$.
- Die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich A, d.h. $A/(A \times A) = \{A\}$.
- Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten.
- Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E.
- Im Fall $E \subseteq E'$ sagt man auch, E bewirkt eine feinere Partitionierung als E'.
- Demnach ist die Identität die feinste und die Allrelation die gröbste Äquivalenzrelation.

Schwache Zusammenhangskomponenten eines Digraphen

Bemerkung

- Der Schnitt über eine Menge von Äquivalenzrelationen auf A ist wieder eine Äquivalenzrelation auf A.
- Daher können wir für eine beliebige Relation R auf A die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation auf A definieren:

$$h_{\text{äq}}(R) = \bigcap \{E \subseteq A \times A \mid E \text{ ist eine Äquivalenzrelation mit } R \subseteq E\}.$$

- In der Graphentheorie werden die durch die Äquivalenzklassen von $h_{\text{äq}}(R)$ induzierten Teilgraphen auch die schwachen Zusammenhangskomponenten des Digraphen (A, R) genannt.

Ordnungsrelationen

Definition

(A, R) heißt Ordnung (auch Halbordnung oder partielle Ordnung), wenn R eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$.
- Auf der Menge $\mathcal{A}(M)$ aller Äquivalenzrelationen auf M die Relation "feiner als".
- Ist R eine Ordnung auf A und $B \subseteq A$, so heißt die Ordnung $R_B = R \cap (B \times B)$ die Einschränkung (oder Restriktion) von R auf B.
- Beispielsweise ist $(\mathcal{A}(M); \subseteq)$ die Einschränkung von $(\mathcal{P}(M \times M); \subseteq)$ auf $\mathcal{A}(M)$. $\triangleleft$

Darstellung von Ordnungen durch ein Hasse-Diagramm

- Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \cap \overline{Id}_A$.
- Um $\leq$ in einem Hasse-Diagramm darzustellen, wird nur der Graph der Nachbarrelation

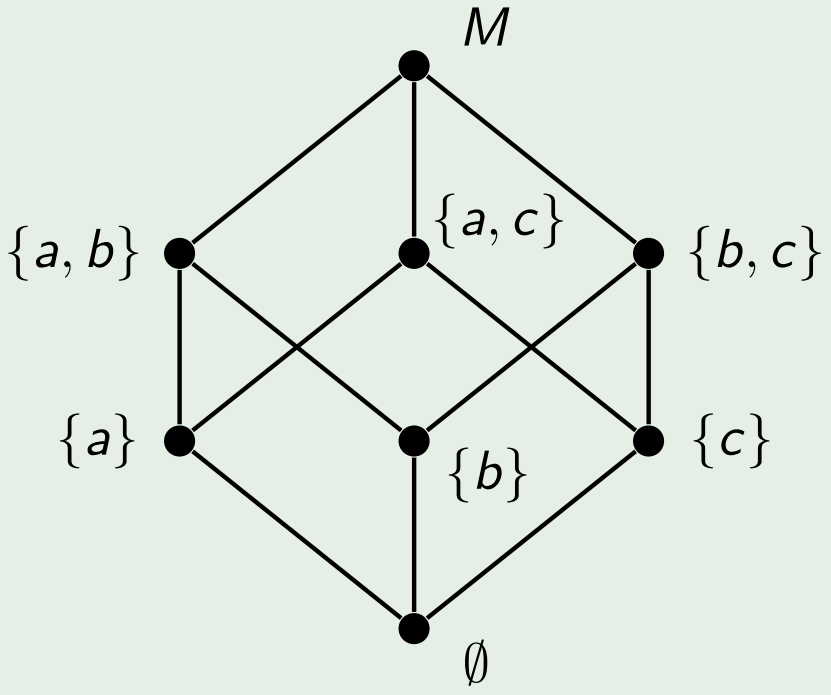
$$\lessdot \; = \; < \setminus <^2, \text{ d.h. } x \lessdot y \;\Leftrightarrow\; x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

  gezeichnet.
- Für $x \lessdot y$ sagt man auch, y ist oberer Nachbar von x.
- Weiterhin wird im Fall $x \lessdot y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Das Hasse-Diagramm für $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$

Beispiel

Die Inklusion $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ mit $M = \{a, b, c\}$ lässt sich durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:

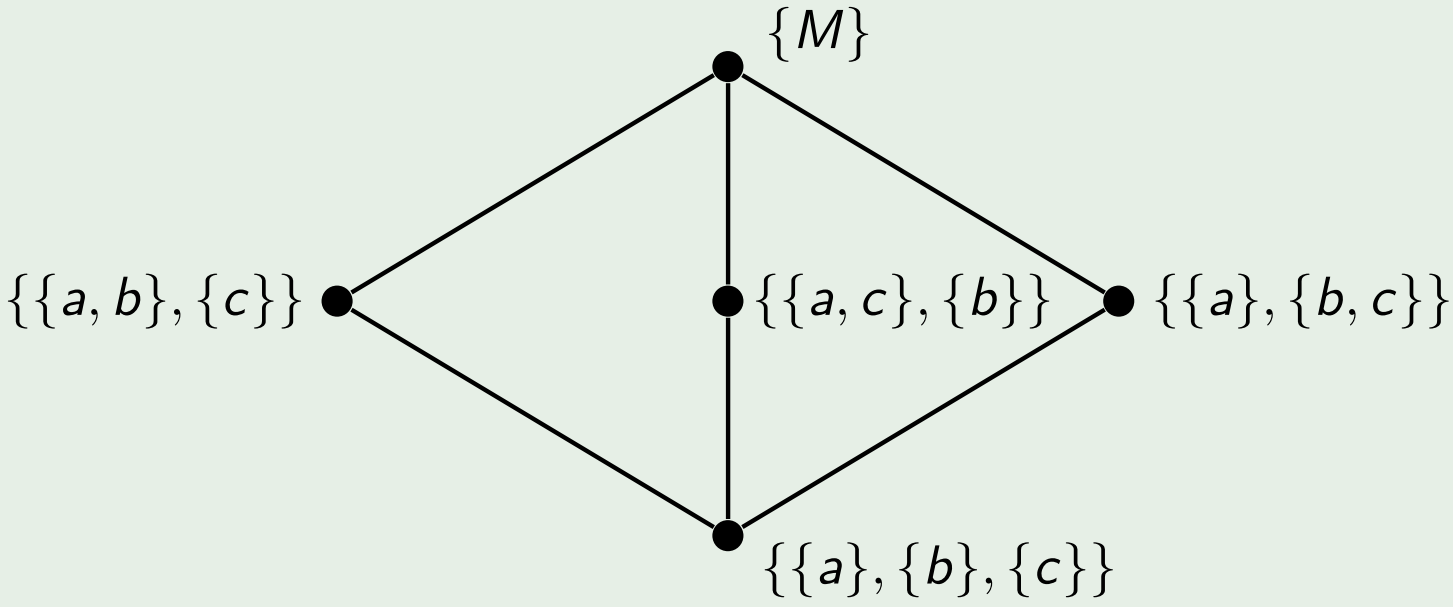


◁

Das Hasse-Diagramm für $(\mathcal{A}(M); \subseteq)$

Beispiel

Die "feiner als" Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:

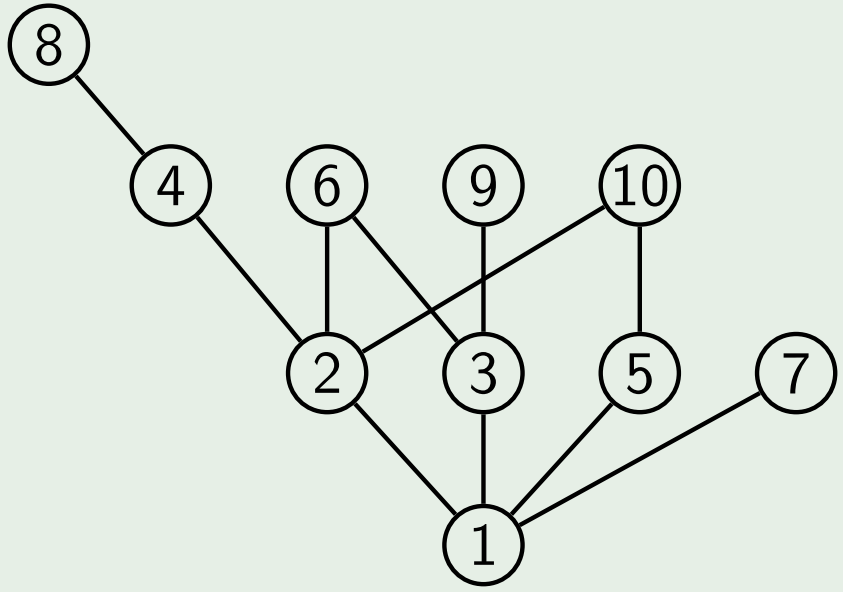


◁

Das Hasse-Diagramm der "teilt"-Relation

Beispiel

Die "teilt"-Relation auf $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:



◁

Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente

Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei b ein Element in einer Teilmenge $B \subseteq A$.

- b heißt kleinstes Element oder Minimum von B, falls gilt:

  $$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b heißt größtes Element oder Maximum von B, falls gilt:

  $$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b heißt minimal in B, falls es in B kein kleineres Element gibt:

  $$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b heißt maximal in B, falls es in B kein größeres Element gibt:

  $$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

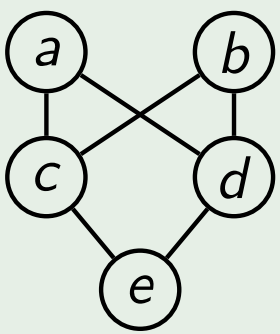
Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente

Bemerkung

Wegen der Antisymmetrie kann es in B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben.

Beispiel

Betrachte folgende Ordnung.



B	minimal in B	maximal in B	Minimum von B	Maximum von B
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a

Obere und untere Schranken

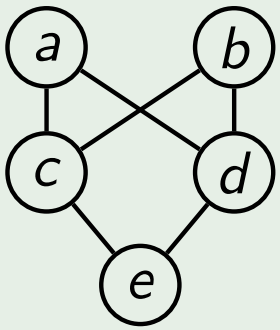
Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Jedes Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt untere Schranke von B.
- Jedes Element $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt obere Schranke von B.
- B heißt nach oben beschränkt, wenn B eine obere Schranke hat.
- B heißt nach unten beschränkt, wenn B eine untere Schranke hat.
- B heißt beschränkt, wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.

Obere und untere Schranken

Beispiel (Fortsetzung)



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a

Infima und Suprema

Definition

Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Besitzt B eine größte untere Schranke i, d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i, so heißt i das Infimum von B ($i = \inf B$):

$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- Besitzt B eine kleinste obere Schranke s, d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s, so heißt s das Supremum von B ($s = \sup B$):

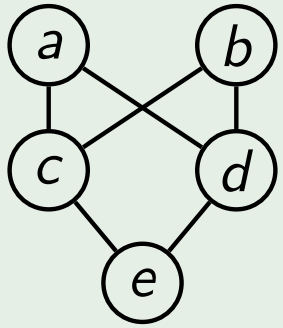
$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Bemerkung

B kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum haben.

Infima und Suprema

Beispiel (Schluss)



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken	inf	sup
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

◁

Infima und Suprema

Bemerkung

- Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen.
- So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

  weder ein Supremum noch ein Infimum.
- Dagegen hat in einer linearen Ordnung jede endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.

Abbildungen

Definition

Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M.

- R heißt rechtseindeutig, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- R heißt linkseindeutig, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M : xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- Der Nachbereich $N(R)$ und der Vorbereich $V(R)$ von R sind

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R(x) \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T(x).$$

Abbildungen

Abbildungen ordnen jedem Element ihres Definitionsbereichs genau ein Element zu.

Definition

Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt Abbildung oder Funktion von A nach B (kurz $R : A \to B$).

Bemerkung

- Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben $f, g, h, \ldots$ bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.
- Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der Definitionsbereich und die Menge B der Wertebereich oder Wertevorrat von f genannt.
- Der Nachbereich $N(f)$ wird als Bild von f bezeichnet.

Abbildungen

Definition

- Im Fall $N(f) = B$ heißt f surjektiv.
- Ist f linkseindeutig, so heißt f injektiv.
- In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.
- Eine injektive und surjektive Abbildung heißt bijektiv.
- Für eine injektive Abbildung $f : A \to B$ ist auch f^{-1} eine Abbildung, die als die zu f inverse Abbildung bezeichnet wird.

Bemerkung

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

Homomorphismen

Definition

Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.

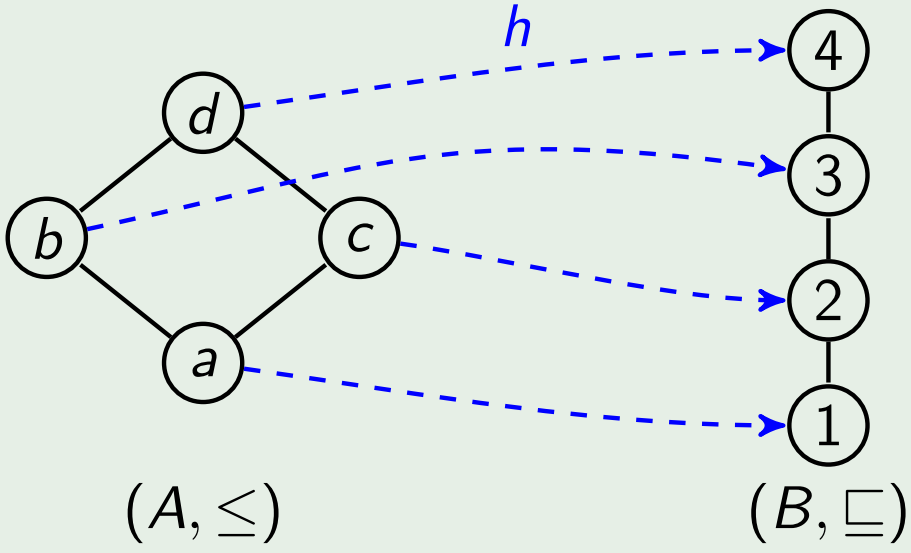
- Eine Abbildung $h : A_1 \to A_2$ heißt Homomorphismus, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

- Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man auch von Ordnungshomomorphismen oder einfach von monotonen Abbildungen.
- Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch streng monotone Abbildungen genannt.

Homomorphismen

Beispiel



- Die Abbildung $h : A \to B$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.
- Die Umkehrabbildung h^{-1} ist jedoch kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist.
- Es gilt nämlich $2 \sqsubseteq 3$, aber $h^{-1}(2) = b \not\leq c = h^{-1}(3)$. $\triangleleft$

Isomorphismen

Definition

- Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.
- Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \to A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt

  $$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

  heißt Isomorphismus.
- In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) isomorph (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) isomorph, so bedeutet dies, dass sich die eine Struktur aus der anderen durch eine bloße Umbenennung der Elemente gewinnen lässt.

Isomorphismen

Beispiel

- Die Bijektion $h : x \mapsto e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}^+, \leq)$.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

und

$$P_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ist Primteiler von } n\}.$$

Dann ist die Abbildung

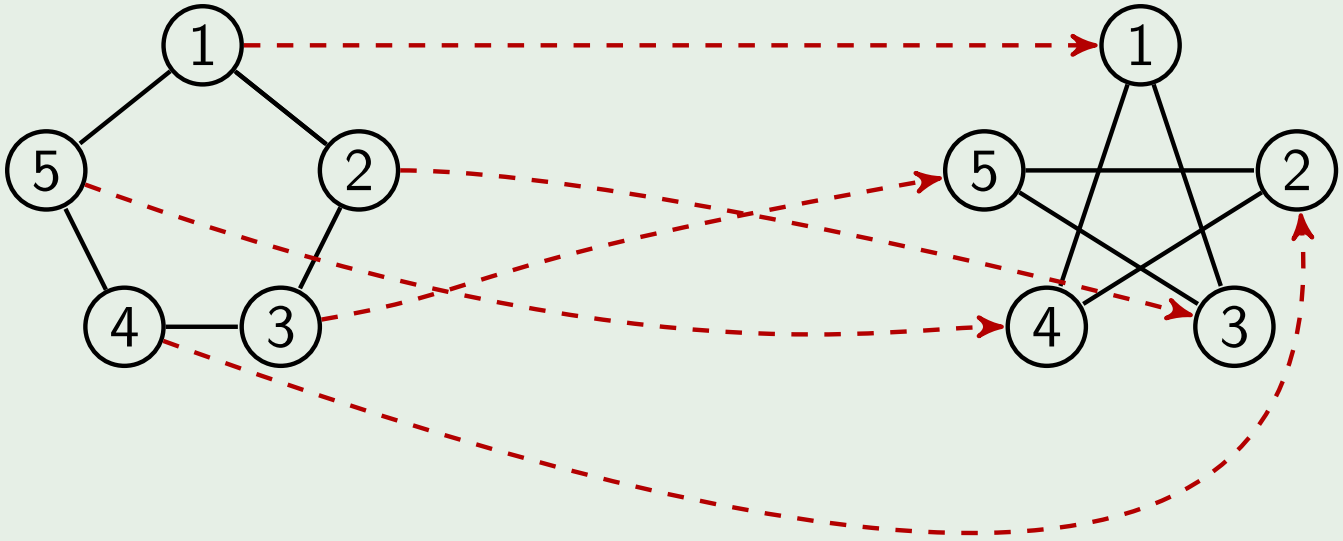
$$h : k \mapsto P_k$$

ein Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$.

h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt). ◁

Isomorphismen

Beispiel



$G = (V, E)$

v	1 2 3 4 5
$h_1(v)$	1 3 5 2 4
$h_2(v)$	1 4 2 5 3

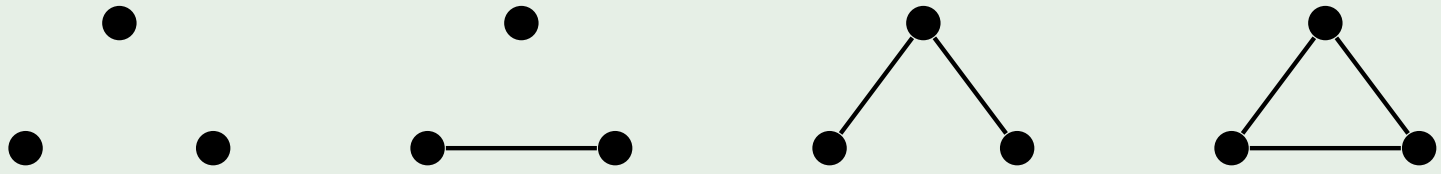
$G' = (V, E')$

- Die beiden Graphen G und G' sind isomorph.
- Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2. ◁

Isomorphismen

Beispiel

- Während auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3\}$ insgesamt $2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:



◁

Isomorphismen

Beispiel

- Auf der Knotenmenge $V = [n]$ existieren genau $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Graphen.
- Sei $a(n)$ die Anzahl aller nichtisomorphen Graphen auf V.
- Da jede Isomorphieklasse mindestens einen und höchstens $n!$ Graphen enthält, folgt

$$2^{\binom{n}{2}}/n! \leq a(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}.$$

- Tatsächlich ist $a(n)$ asymptotisch gleich der unteren Schranke $u(n) = 2^{\binom{n}{2}}/n!$ (in Zeichen: $a(n) \sim u(n)$), d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a(n)/u(n) = 1.$$

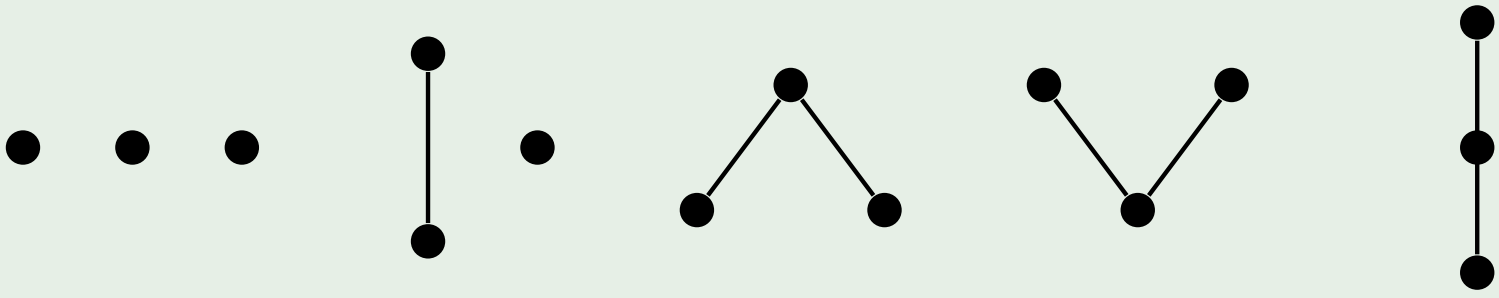
- Also gibt es auf $V = \{1, \ldots, n\}$ nicht wesentlich mehr als $u(n)$ nichtisomorphe Graphen.

◁

Isomorphismen

Beispiel

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



- Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Isomorphierelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden. $\triangleleft$

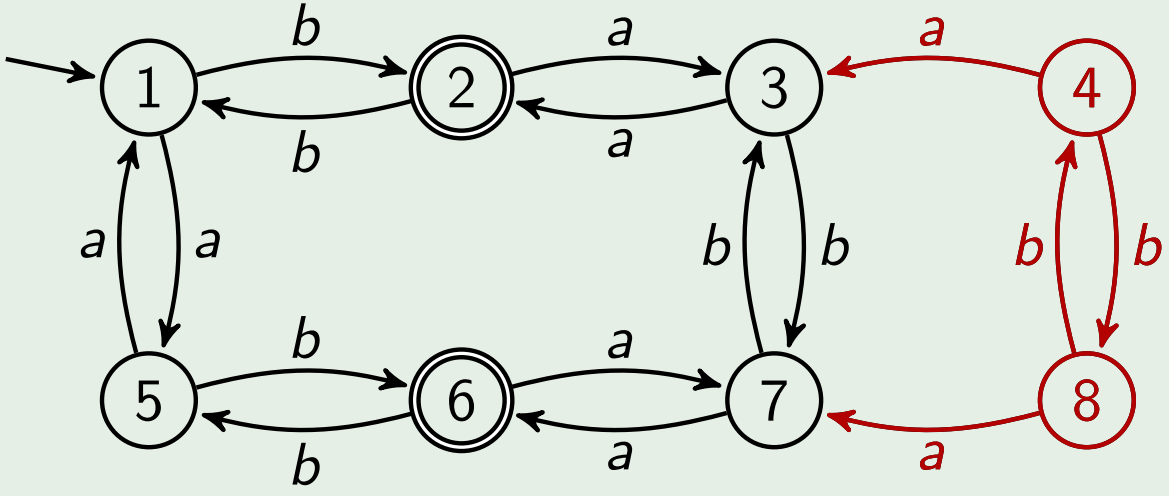
Minimierung von DFAs

Frage

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine minimale Anzahl von Zuständen besitzt (und Z evtl. verkleinern)?

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Zunächst können alle vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände entfernt werden.

◁

Minimierung von DFAs

Frage

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine minimale Anzahl von Zuständen besitzt (und Z evtl. verkleinern)?

Antwort

- Zunächst können alle vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände entfernt werden.
- Zudem lassen sich zwei Zustände p und q verschmelzen, wenn M von p und q aus jeweils dieselben Wörter akzeptiert.
- Für $z \in Z$ sei

$$M_z = (Z, \Sigma, \delta, z, E) \text{ und } L_z = L(M_z).$$

- Dann können wir p und q verschmelzen (in Zeichen: $p \sim q$), wenn $L_p = L_q$ ist.
- Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Z.

Minimierung von DFAs

Idee

Verschmelze jeden Zustand z mit allen äquivalenten Zuständen $z' \sim z$ zu einem neuen Zustand.

Notation

- Für die durch z repräsentierte Äquivalenzklasse

  $$[z]_\sim = \{z' \in Z \mid z' \sim z\} = \{z' \in Z \mid L_{z'} = L_z\}$$

  schreiben wir auch einfach $[z]$ oder $\tilde{z}$.
- Für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ bezeichne

  $$\tilde{Q} = \{\tilde{q} \mid q \in Q\}$$

  die Menge aller Äquivalenzklassen $\tilde{q}$, die mindestens ein Element $q \in Q$ enthalten.

Minimierung von DFAs

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Dann ist

$$\tilde{M} = (\tilde{Z}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{E}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\delta}(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis

- Zuerst müssen wir zeigen, dass $\tilde{\delta}$ wohldefiniert ist, also $\tilde{\delta}(\tilde{q}, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten q für die Äquivalenzklasse $\tilde{q}$ abhängt.
- Hierzu zeigen wir die Implikation $p \sim q \Rightarrow \delta(p, a) \sim \delta(q, a)$:

$$\begin{aligned} L_q = L_p &\Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L_q \leftrightarrow x \in L_p \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : ax \in L_q \leftrightarrow ax \in L_p \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L_{\delta(q,a)} \leftrightarrow x \in L_{\delta(p,a)} \\ &\Leftrightarrow L_{\delta(q,a)} = L_{\delta(p,a)}. \end{aligned}$$

Minimierung von DFAs

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Dann ist

$$\tilde{M} = (\tilde{Z}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{E}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\delta}(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis (Fortsetzung)

- Als nächstes zeigen wir, dass $L(\tilde{M}) = L(M)$ ist.
- Sei $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ und seien $q_0, q_1, \cdots, q_n$ die von M bei Eingabe x durchlaufenen Zustände, d.h. es gilt $\delta(q_{i-1}, x_i) = q_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
- Nach Definition von $\tilde{\delta}$ folgt daher $\tilde{\delta}(\tilde{q}_{i-1}, x_i) = \tilde{q}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h. $\tilde{M}$ durchläuft bei Eingabe x die Zustände $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n$.
- Da aber $\tilde{q}_n$ entweder nur End- oder nur Nicht-Endzustände enthält, gehört q_n genau dann zu E, wenn $\tilde{q}_n \in \tilde{E}$, d.h. es gilt

$$x \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(\tilde{M}).$$

Minimierung von DFAs

Beweis (Schluss)

- Noch z.z.: $\tilde{M}$ hat eine minimale Anzahl von Zuständen.
- Da $\tilde{M}$ nicht mehr Zustände hat als M, ist $\tilde{M}$ sicher dann minimal, wenn M bereits minimal ist.
- Es reicht also zu zeigen, dass die Anzahl $k = \|\tilde{Z}\| = \|\{L_q \mid q \in Z\}\|$ der Zustände von $\tilde{M}$ nicht von M, sondern nur von $L = L(M)$ abhängt.
- Für $x \in \Sigma^*$ sei

$$L_x = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}.$$

- Dann gilt $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} = \{L_q \mid q \in Z\}$:
  - $\subseteq$: Klar, da $L_x = L_q$ für $q = \hat{\delta}(q_0, x)$ ist.
  - $\supseteq$: Auch klar, da jedes $q \in Z$ über ein $x \in \Sigma^*$ erreichbar ist.
- Also hängt $k = \|\{L_q \mid q \in Z\}\| = \|\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}\|$ nur von L ab.

□

Wie können wir $\tilde{M}$ aus M konstruieren?

Hierzu genügt es, herauszufinden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht?

- Sei $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B.
- Die Inäquivalenz $p \not\sim q$ ist also gleichbedeutend mit $L_p \Delta L_q \neq \emptyset$.
- Wir nennen ein Wort $x \in L_p \Delta L_q$ Unterscheider zwischen p und q.
- Offenbar unterscheidet ε Zustände $p \in E$ von Zuständen $q \in Z \setminus E$.
- Falls x die Zustände $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidet, so unterscheidet ax die Zustände p und q, d.h. $x \in L_{\delta(p,a)} \Delta L_{\delta(q,a)} \Rightarrow ax \in L_p \Delta L_q$.
- Wenn also D nur inäquivalente Zustandspaare enthält, so trifft dies auch auf die Menge

$$D' = \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D\}$$

zu.

Algorithmische Konstruktion von $\tilde{M}$

Idee

- Berechne ausgehend von $D_0 = \{\{p, q\} \mid p \in E, q \notin E\}$ mittels

  $$D_{i+1} = D_i \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D_i\}$$

  eine Folge $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ von Mengen mit inäquivalenten Zustandspaaren.
- Da es nur endlich viele Zustandspaare gibt, muss es ein j geben mit $D_{j+1} = D_j$.
- Für dieses j gilt dann

  $$p \not\sim q \Leftrightarrow \{p, q\} \in D_j \quad \text{(siehe Übungen)}.$$

- Folglich ist

  $$\tilde{z} = \{z\} \cup \{z' \in Z \mid \{z, z'\} \notin D_j\}.$$

Algorithmus zur Berechnung eines minimalen DFA

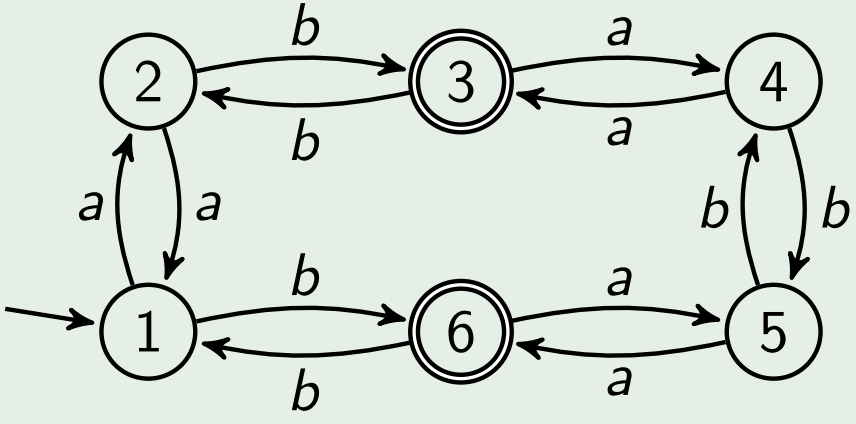
Algorithmus `min-DFA`(M)

1 **Input:** `DFA` $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$
2 `entferne alle nicht erreichbaren Zustände`
3 $D' := \{\{z, z'\} \mid z \in E, z' \notin E\}$
4 **repeat**
5 $D := D'$
6 $D' := D \cup \{\{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D\}$
7 **until** $D' = D$
8 **Output:** $\tilde{M} = (\tilde{Z}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{E})$, `wobei für jeden Zustand` $z \in Z$ `gilt:` $\tilde{z} = \{z\} \cup \{z' \in Z \mid \{z, z'\} \notin D\}$

Algorithmus für die Konstruktion von $\tilde{M}$

Beispiel

Betrachte den DFA M



2					
3	ε	ε			
4			ε		
5			ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

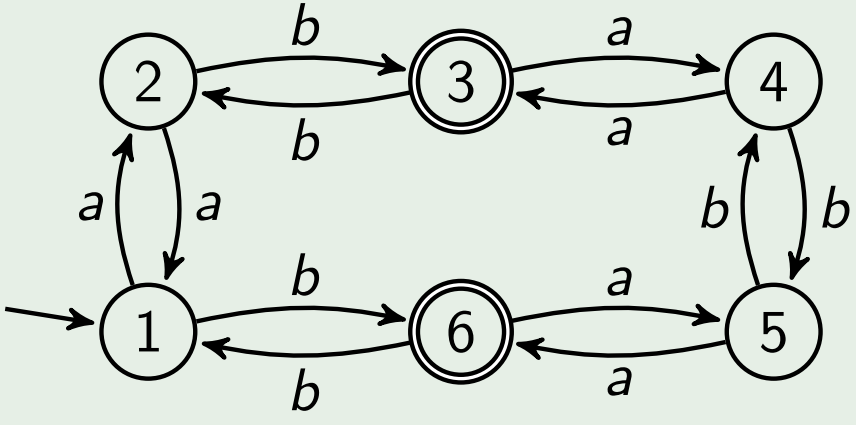
Dann enthält D_0 die Paare

$$\{1,3\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,6\},\{5,6\}.$$

Algorithmus für die Konstruktion von $\tilde{M}$

Beispiel

Betrachte den DFA M



2				
3	ε	ε		
4	a	a	ε	
5	a	a	ε	
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Wegen

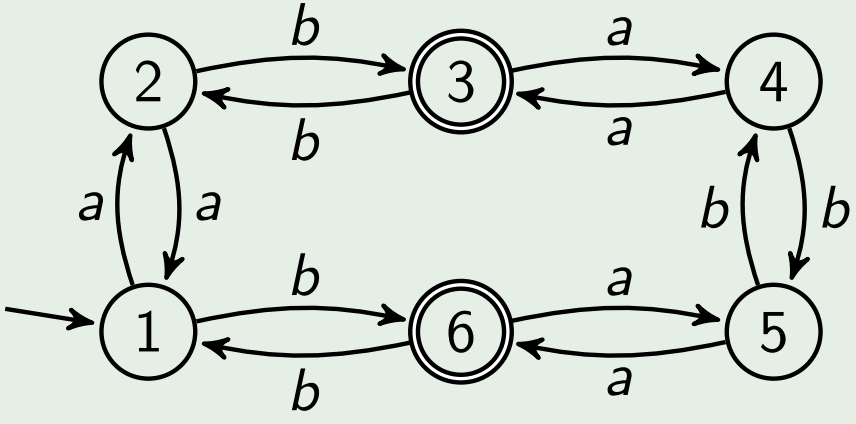
$\{p, q\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$
$\{\delta(q,a), \delta(p,a)\}$	$\{2,3\}$	$\{2,6\}$	$\{1,3\}$	$\{1,6\}$

enthält D_1 zusätzlich die Paare $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$.

Algorithmus für die Konstruktion von $\tilde{M}$

Beispiel

Betrachte den DFA M



2				
3	ε	ε		
4	a	a	ε	
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Da nun jedoch die verbliebenen Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ wegen

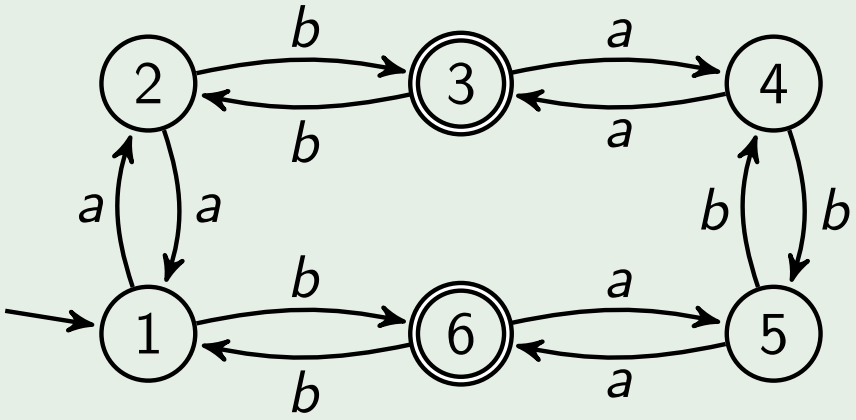
$\{p,q\}$	$\{1,2\}$	$\{3,6\}$	$\{4,5\}$
$\{\delta(p,a),\delta(q,a)\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$	$\{3,6\}$
$\{\delta(p,b),\delta(q,b)\}$	$\{3,6\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$

nicht zu D_1 hinzugefügt werden können, ist $D_2 = D_1$.

Algorithmus für die Konstruktion von $\tilde{M}$

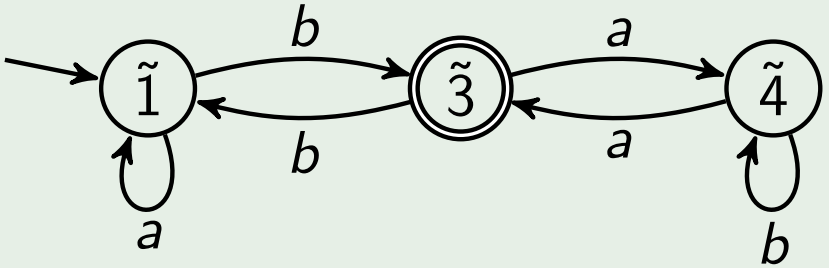
Beispiel

Betrachte den DFA M



	1	2	3	4	5
2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε

Da die Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$ und $\{4,5\}$ nicht in D_1 enthalten sind, können die Zustände 1 und 2, 3 und 6, sowie 4 und 5 verschmolzen werden. Demnach hat $\tilde{M}$ die Zustände $\tilde{1} = \{1,2\}$, $\tilde{3} = \{3,6\}$ und $\tilde{4} = \{4,5\}$:



◁

Direkte Konstruktion eines Minimal-DFA aus L

Bemerkung

- $\tilde{M}$ erreicht nach Lesen von x den Zustand $\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)}$. Wegen

$$\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)} = \widetilde{\hat{\delta}(q_0, y)} \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \sim \hat{\delta}(q_0, y)$$
$$\Leftrightarrow L_{\hat{\delta}(q_0,x)} = L_{\hat{\delta}(q_0,y)} \Leftrightarrow L_x = L_y$$

  können die Zustände $\widetilde{\hat{\delta}(q_0, x)}$ von $\tilde{M}$ auch mit L_x bezeichnet werden.

- Dies führt auf den zu $\tilde{M}$ isomorphen DFA $M_L = (Z_L, \Sigma, \delta_L, L_\varepsilon, E_L)$ mit

$$Z_L = \{L_x \mid x \in \Sigma^*\},\ E_L = \{L_x \mid x \in L\} \text{ und } \delta_L(L_x, a) = L_{xa},$$

  der sich auch direkt aus der Sprache L gewinnen lässt.

- Notwendig und hinreichend für die Existenz von M_L ist, dass die Menge $Z_L = \{L_x \mid x \in \Sigma^*\}$ endlich ist.

- L ist also genau dann regulär, wenn der Index der durch

$$x\, R_L\, y \Leftrightarrow L_x = L_y$$

  auf Σ^* definierten Äquivalenzrelation R_L endlich ist.

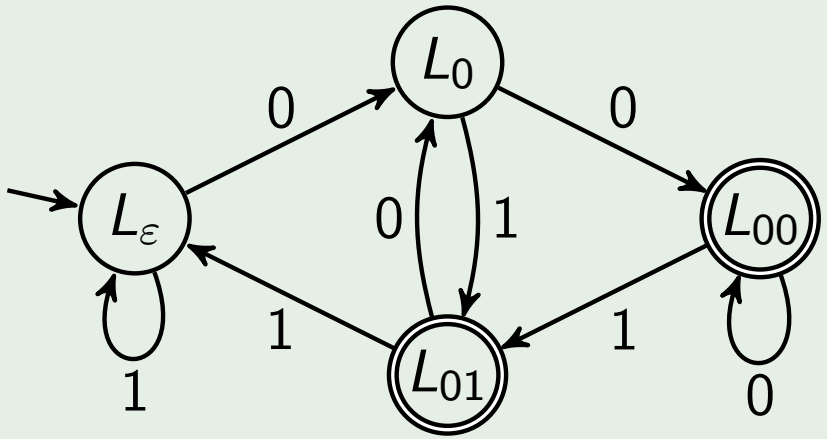
Direkte Konstruktion eines Minimal-DFA aus L

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$.
- Dann hat M_L die folgenden Sprachen als Zustände:

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \text{ oder } x \text{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0,1\}, & x = 0 \text{ oder } x \text{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon, 0, 1\}, & x \text{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \text{ endet mit } 01. \end{cases}$$

- Graphische Darstellung von M_L:



◁

Der Satz von Myhill und Nerode

- Ist M ein DFA mit einer minimalen Anzahl von Zuständen, so haben die Zustände von $\tilde{M}$ die Form $\tilde{q} = \{q\}$, d.h. M ist isomorph zu $\tilde{M}$.
- Da $\tilde{M}$ wiederum isomorph zu M_L ist, ist jeder minimale DFA M mit $L(M) = L$ isomorph zu M_L, d.h. für jede reguläre Sprache L gibt es bis auf Isomorphie nur einen Minimal-DFA.

Satz (Myhill und Nerode)

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\begin{aligned} R_L &= \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid L_x = L_y\} \\ &= \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\} \end{aligned}$$

und sei $\mathit{index}(R_L)$ der Index von R_L. Dann gilt:

1. $\mathrm{REG} = \{L \mid \mathit{index}(R_L) < \infty\}$.
2. Für jede reguläre Sprache L gibt es bis auf Isomorphie genau einen Minimal-DFA. Dieser hat $\mathit{index}(R_L)$ Zustände.

Der Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} für L

- Zwei Eingaben x und y überführen den DFA M_L genau dann in denselben Zustand, wenn $L_x = L_y$ ist (also xR_Ly gilt).
- Die Zustände von M_L können daher anstelle von L_x auch mit den Äquivalenzklassen $[x]$ von R_L (bzw. mit geeigneten Repräsentanten) benannt werden.
- Der resultierende Minimal-DFA M_{R_L} wird auch als Äquivalenzklassen-automat bezeichnet:

$$M_{R_L} = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon], E) \text{ mit } Z = \{[x] \mid x \in \Sigma^*\} \text{ und } E = \{[x] \mid x \in L\}.$$

- Für die Konstruktion von δ genügt es, ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ eine Folge von Wörtern $r_1, \ldots, r_k$ mit $[r_i] \neq [r_j]$ zu bestimmen, so dass zu jedem r_i und jedem Zeichen $a \in \Sigma$ ein r_j existiert mit $r_i a \in [r_j]$.
- In diesem Fall ist dann $\delta([r_i], a) = [r_i a] = [r_j]$.
- Die Konstruktion von M_{R_L} erfordert meist weniger Aufwand als die von M_L, da die Bestimmung der Sprachen L_x entfällt.

Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$

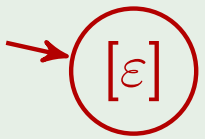
r	
$[r0]$	
$[r1]$	

Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

r	ε
$[r0]$	
$[r1]$	



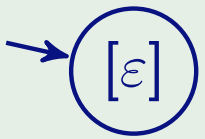
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0$

r	ε
$[r0]$	
$[r1]$	



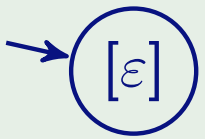
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$

r	ε
$[r0]$	
$[r1]$	



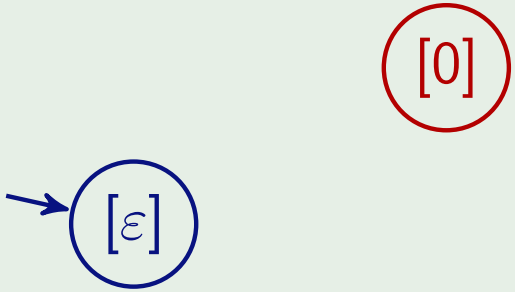
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und

r	ε	0
$[r0]$		
$[r1]$		



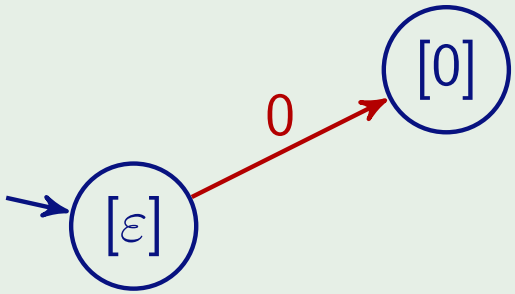
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.

r	ε	0
$[r0]$	$[0]$	
$[r1]$		



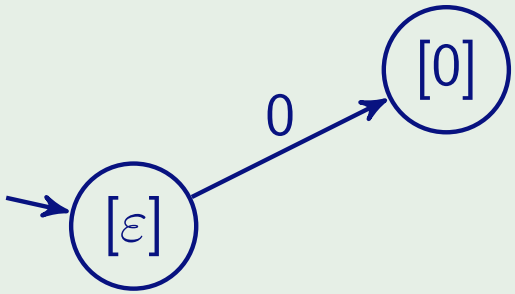
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1$

r	ε	0
$[r0]$	$[0]$	
$[r1]$		



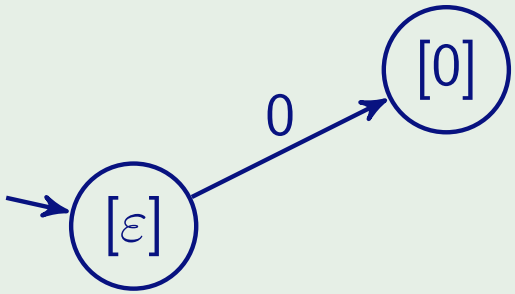
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$

r	ε	0
$[r0]$	$[0]$	
$[r1]$		



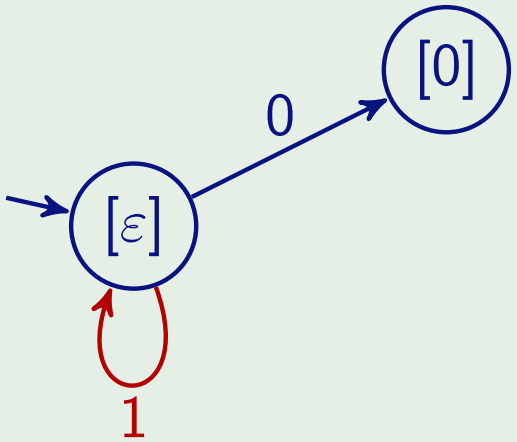
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.

r	ε	0
$[r0]$	$[0]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	



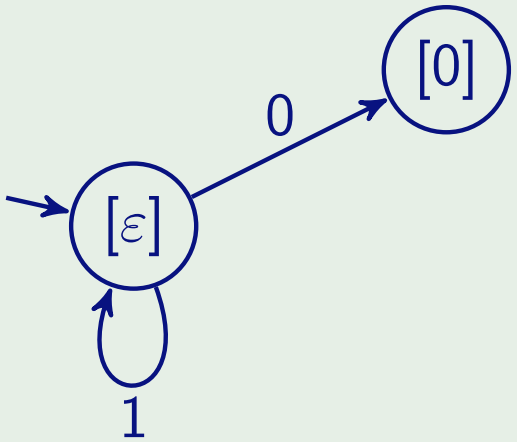
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00$

r	ε	0
$[r0]$	$[0]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	



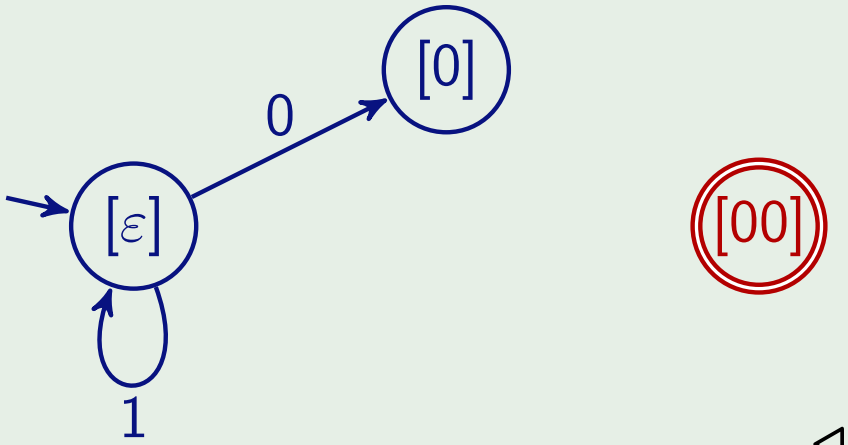
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und

r	ε	0	00
$[r0]$	$[0]$		
$[r1]$	$[\varepsilon]$		



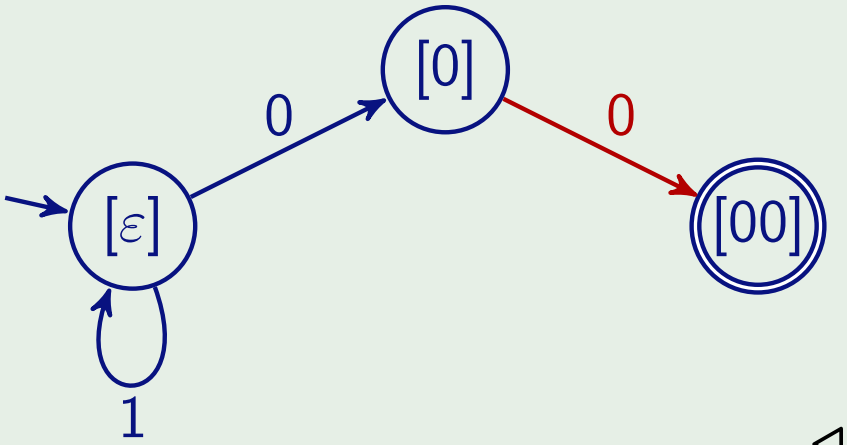
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.

r	ε	0	00
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$		



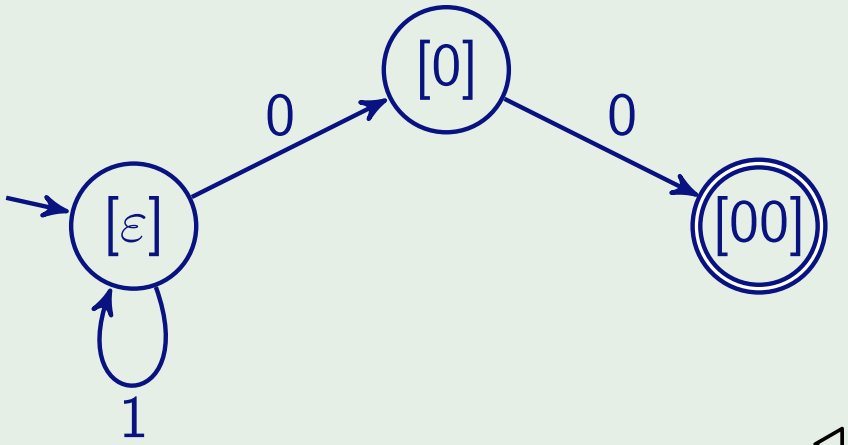
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01$

r	ε	0	00
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$		



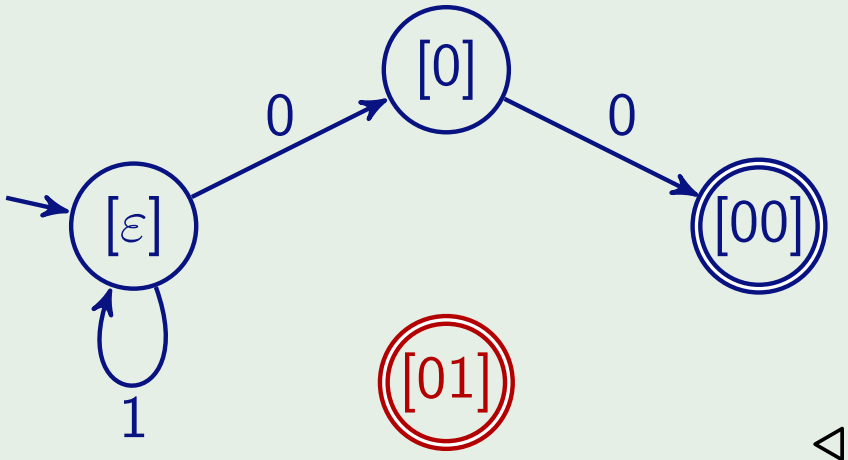
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$		
$[r1]$	$[\varepsilon]$			



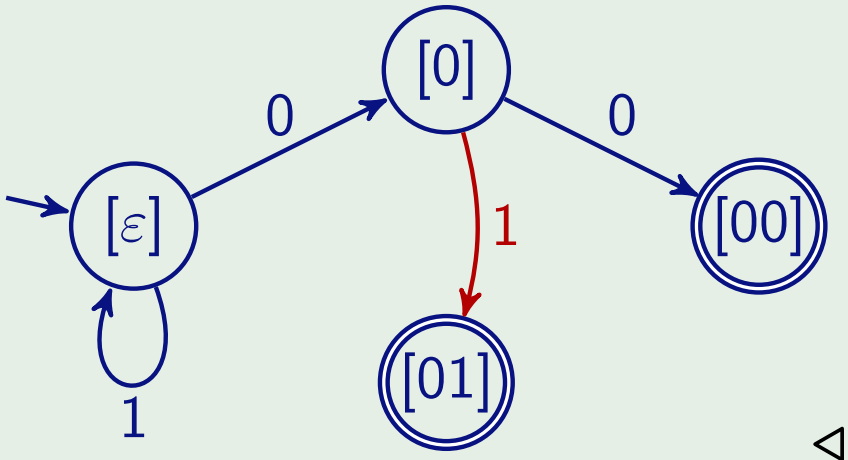
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$		
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



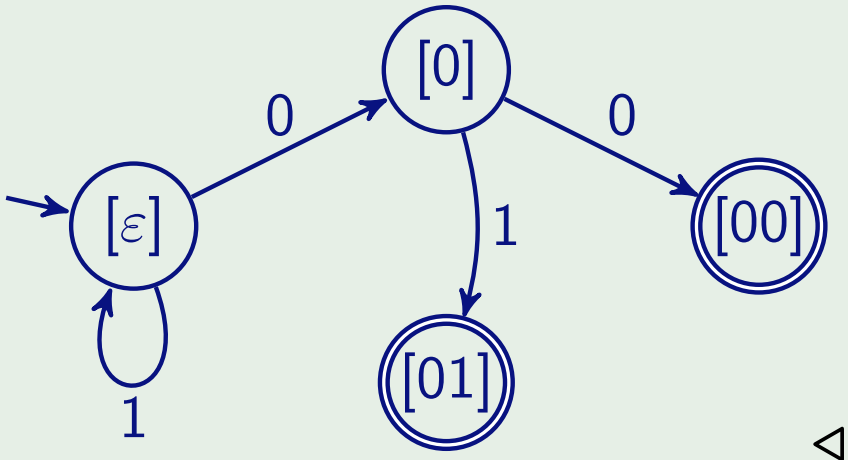
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$		
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



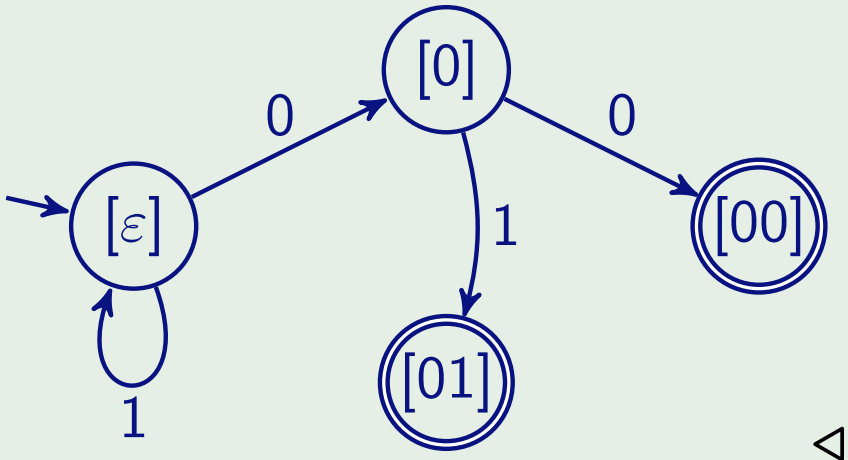
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$		
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



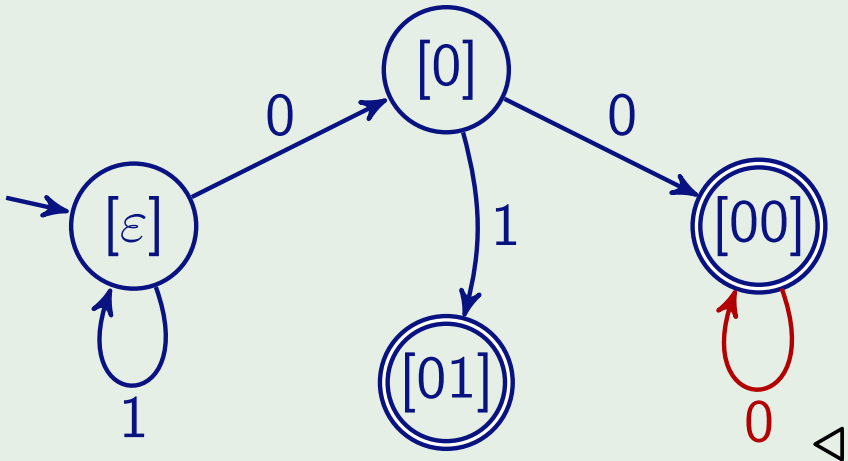
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



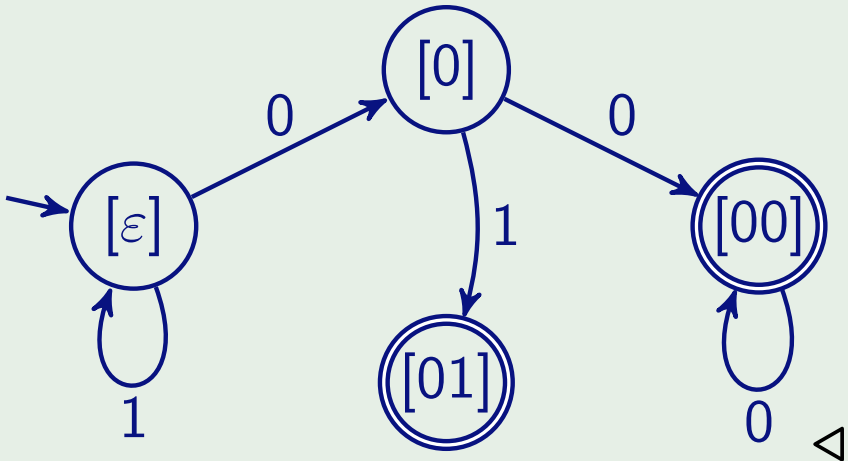
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



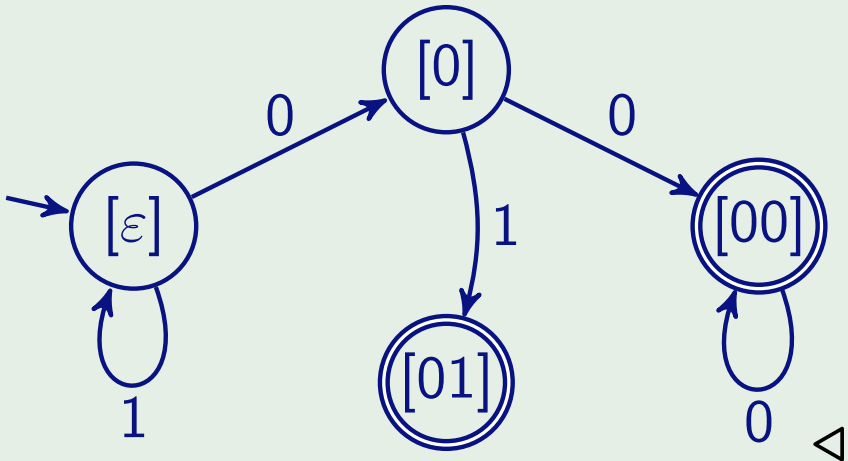
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$		



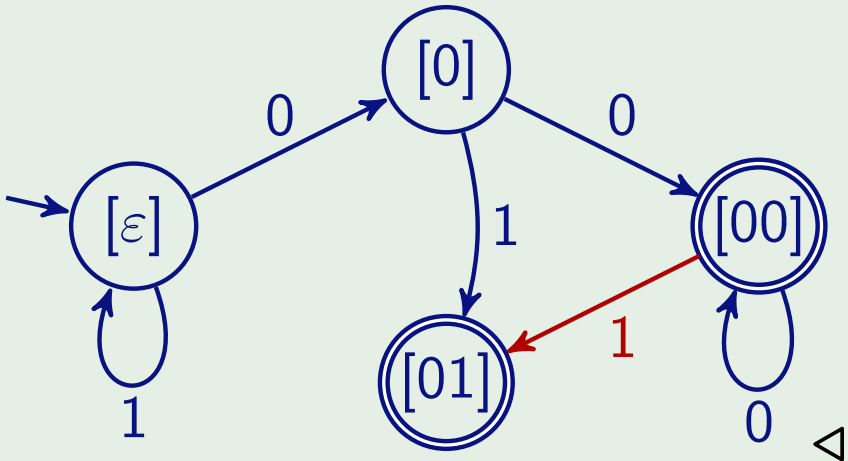
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



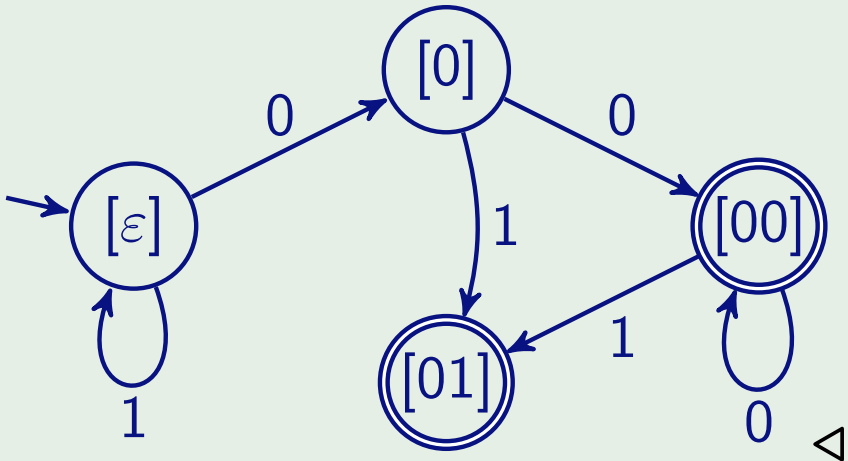
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



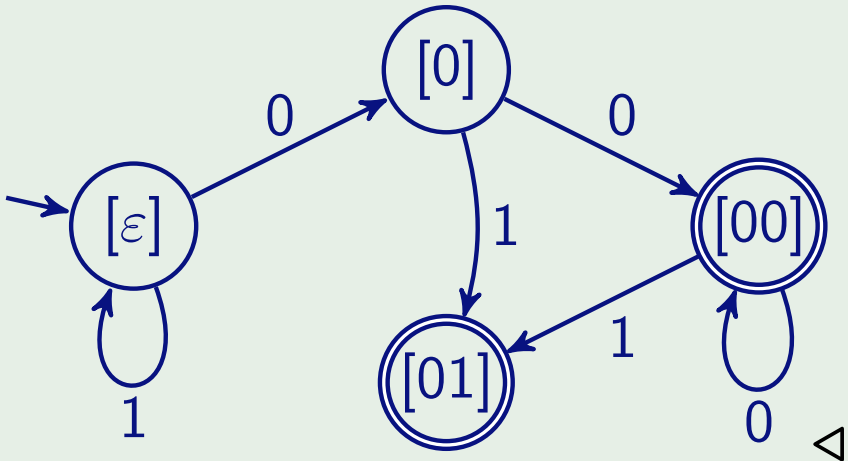
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



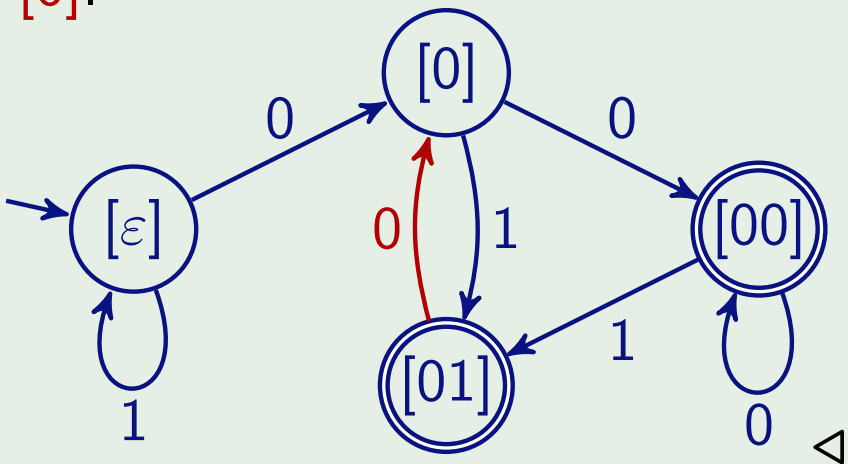
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



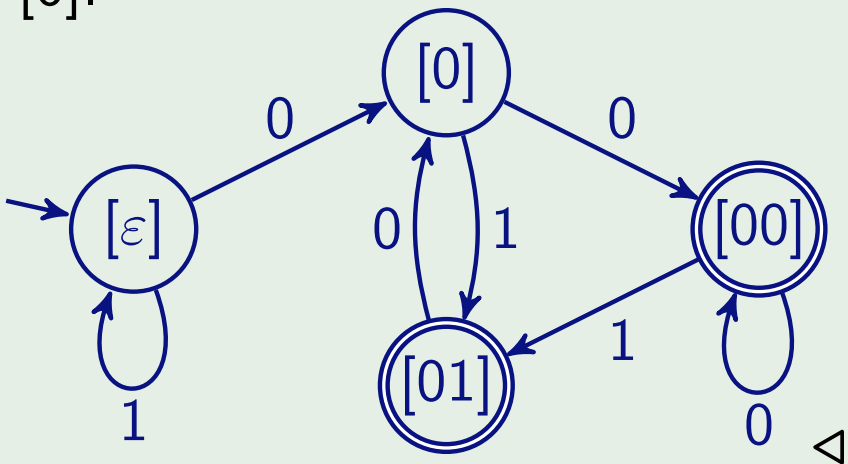
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.
8. Wegen $r_4 1 = 011$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



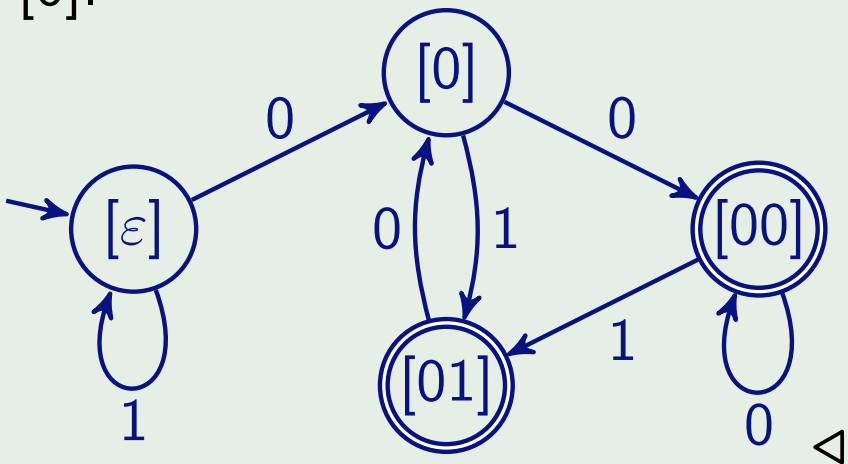
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.
8. Wegen $r_4 1 = 011 \in [\varepsilon]$

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	



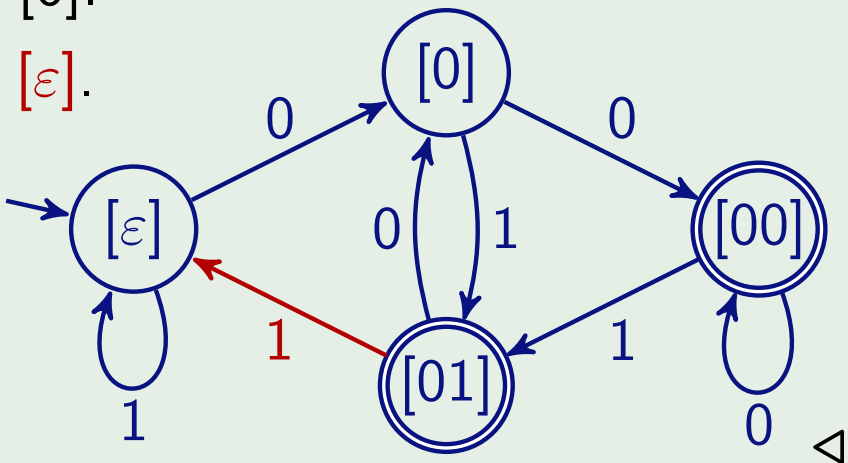
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.
8. Wegen $r_4 1 = 011 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([01], 1) = [\varepsilon]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	$[\varepsilon]$



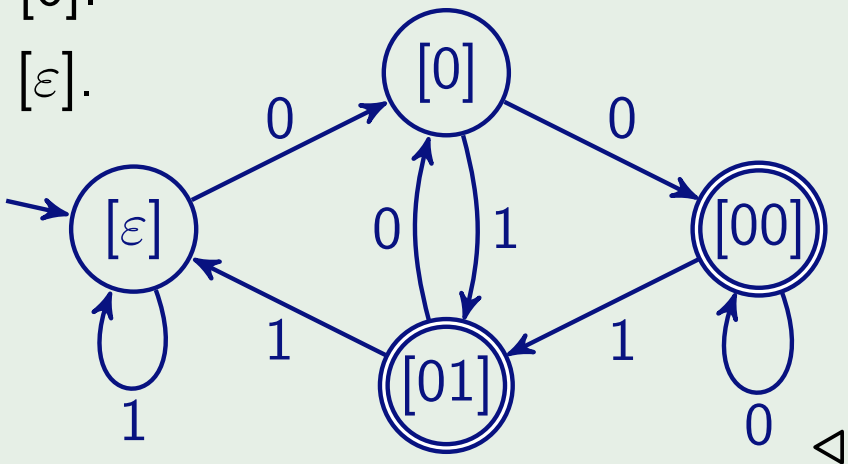
Direkte Konstruktion des Äquivalenzklassen-DFA M_{R_L} aus L

Beispiel

Für die Sprache $L = \{x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ wie folgt konstruieren:

1. Wegen $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist $r_2 = 0$ und $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.
2. Wegen $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.
3. Wegen $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist $r_3 = 00$ und $\delta([0], 0) = [00]$.
4. Wegen $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist $r_4 = 01$ und $\delta([0], 1) = [01]$.
5. Wegen $r_3 0 = 000 \in [00]$ ist $\delta([00], 0) = [00]$.
6. Wegen $r_3 1 = 001 \in [01]$ ist $\delta([00], 1) = [01]$.
7. Wegen $r_4 0 = 010 \in [0]$ ist $\delta([01], 0) = [0]$.
8. Wegen $r_4 1 = 011 \in [\varepsilon]$ ist $\delta([01], 1) = [\varepsilon]$.

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	$[\varepsilon]$



◁

Nachweis von $L \notin \mathrm{REG}$ mittels Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Beweis

Wegen

$$b^i \in L_{a^i} \Delta L_{a^j} \text{ für } i \neq j$$

hat R_L unendlichen Index. $\square$

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index.

Ausblick

Wir werden nun noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken.

Erzeugung der regulären Ausdrücke mit einer Grammatik

Eine elegante Methode, Sprachen zu beschreiben, sind Grammatiken. Implizit haben wir hiervon bei der Definition der regulären Ausdrücke schon Gebrauch gemacht.

Beispiel

Die Sprache RA aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ lässt sich aus dem Symbol R unter Anwendung folgender Regeln erzeugen:

$$R \rightarrow \emptyset, \qquad R \rightarrow RR,$$
$$R \rightarrow \epsilon, \qquad R \rightarrow (R|R),$$
$$R \rightarrow a_i,\ i = 1, \ldots, k, \qquad R \rightarrow (R)^*.$$

Definition einer Grammatik

Definition

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V eine endliche Menge von Variablen (auch Nichtterminalsymbole genannt),
- Σ das Terminalalphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von Regeln (oder Produktionen) und
- $S \in V$ die Startvariable ist.

Bemerkung

Für $(u, v) \in P$ schreiben wir auch kurz $u \to_G v$ bzw. $u \to v$, wenn die benutzte Grammatik aus dem Kontext ersichtlich ist.

Die von einer Grammatik erzeugte Sprache

- Ein Wort $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ ist aus einem Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^+$ in einem Schritt ableitbar (kurz: $\alpha \Rightarrow_G \beta$), falls eine Regel $u \to_G v$ und Wörter $l, r \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit

  $$\alpha = lur \text{ und } \beta = lvr.$$

  Hierfür schreiben wir auch $l\underline{u}r \Rightarrow_G lvr$.
- Eine Folge $\sigma = (l_0, u_0, r_0), \ldots, (l_m, u_m, r_m)$ von Tripeln (l_i, u_i, r_i) heißt Ableitung von β aus α, falls gilt:
  - $l_0 u_0 r_0 = \alpha$, $l_m u_m r_m = \beta$ und
  - $l_i \underline{u_i} r_i \Rightarrow l_{i+1} u_{i+1} r_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, m-1$.

  Die Länge der Ableitung σ ist m und wir notieren σ auch in der Form

  $$l_0 \underline{u_0} r_0 \Rightarrow l_1 \underline{u_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{u_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow l_m u_m r_m.$$

- Die durch G erzeugte Sprache ist $L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}$.
- Ein Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow_G^* \alpha$ heißt Satzform von G.

Ableitungen in einer Grammatik

Zur Erinnerung:

- $\Rightarrow^*$ bezeichnet die reflexive, transitive Hülle der Relation $\Rightarrow$, d.h. $\alpha \Rightarrow^* \beta$ bedeutet, dass es ein $n \geq 0$ gibt mit $\alpha \Rightarrow^n \beta$.

  Hierzu sagen wir auch, β ist aus α (in n Schritten) ableitbar.
- $\Rightarrow^n$ bezeichnet das n-fache Produkt der Relation $\Rightarrow$, d.h. es gilt $\alpha \Rightarrow^n \beta$, falls Wörter $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ existieren mit
  - $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ und
  - $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Ableitung eines Wortes

Beispiel

- Wir betrachten nochmals die Grammatik

$$G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), |, ^*\}, P, R)$$

für die Sprache aller regulären Ausdrücke über Σ mit den Regeln

$$\begin{aligned} P: \quad & R \to \emptyset, \epsilon, a, \ a \in \Sigma \\ & R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*. \end{aligned}$$

- Der reguläre Ausdruck $(01)^*(\epsilon|\emptyset)$ über $\Sigma = \{0, 1\}$ lässt sich in G aus dem Startsymbol R wie folgt ableiten:

$$\begin{aligned} \underline{R} &\Rightarrow \underline{R}R \Rightarrow (\underline{R})^*R \Rightarrow (RR)^*\underline{R} \Rightarrow (\underline{R}R)^*(R|R) \\ &\Rightarrow (0\underline{R})^*(R|R) \Rightarrow (01)^*(\underline{R}|R) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\underline{R}) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\emptyset) \end{aligned}$$

Die Chomsky-Hierarchie

Man unterscheidet vier Typen von Grammatiken $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Definition

1. G heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
   (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to aB$, $A \to a$ oder $A \to \varepsilon$).
2. G heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $u \in V$, (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to \alpha$).
3. G heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:
   $|v| \geq |u|$, (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, s. unten).
4. Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0.

Die ε-Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel $S \to \varepsilon$ zulässig.
Aber nur, wenn das Startsymbol S in keiner Regel rechts vorkommt.

Die Chomsky-Hierarchie

Beispiel

- Wir betrachten nochmals die Grammatik

$$G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), |, ^*\}, P, R)$$

für die Sprache aller regulären Ausdrücke über Σ mit den Regeln

$$\begin{aligned} P: \quad & R \to \emptyset, \epsilon, a, \ a \in \Sigma \\ & R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*. \end{aligned}$$

- Da auf der linken Seite jeder Regel eine einzelne Variable steht, ist G kontextfrei.
- Offenbar ist G aber keine reguläre Grammatik, da zwar die $\|\Sigma\| + 2$ Regeln $R \to \emptyset, \epsilon, a, \ a \in \Sigma$, die geforderte Form haben, nicht jedoch die drei Regeln $R \to RR, \ (R|R), \ (R)^*$.

Die Chomsky-Hierarchie

- Eine Sprache heißt vom Typ i bzw. regulär, kontextfrei oder kontextsensitiv, falls sie von einer entsprechenden Grammatik erzeugt wird.
- Damit erhalten wir die neuen Sprachklassen

  $$\text{CFL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextfreie Grammatik}\}$$

  (context free languages)

  und

  $$\text{CSL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextsensitive Grammatik}\}$$

  (context sensitive languages).
- Da die Klasse der Typ 0 Sprachen mit der Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen übereinstimmt, bezeichnen wir diese Sprachklasse mit

  $$\text{RE} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\}$$

  (recursively enumerable languages).

Die Chomsky-Hierarchie

- Wir werden bald beweisen, dass die Sprachklassen

  $$\mathrm{REG} \subset \mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL} \subset \mathrm{RE}$$

  eine Hierarchie bilden (d.h. die Inklusionen sind echt), die so genannte Chomsky-Hierarchie.
- Zunächst rechtfertigen wir jedoch die Bezeichnung regulär für die regulären Grammatiken und für die von ihnen erzeugten Sprachen.

Reguläre Grammatiken

Satz

REG $= \{L(G) \mid G$ ist eine reguläre Grammatik$\}$.

Beweis von REG $\subseteq \{L(G) \mid G$ ist eine reguläre Grammatik$\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA.
- Wir konstruieren eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M)$.
- Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = Z$, $S = q_0$ und

$$P \quad = \quad \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}.$$

Reguläre Grammatiken

Beweis von REG $\subseteq \{L(G) \mid G$ ist eine reguläre Grammatik$\}$

- Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = Z$, $S = q_0$ und

$$P \quad = \quad \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}.$$

- Dann gilt für alle Wörter $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$:

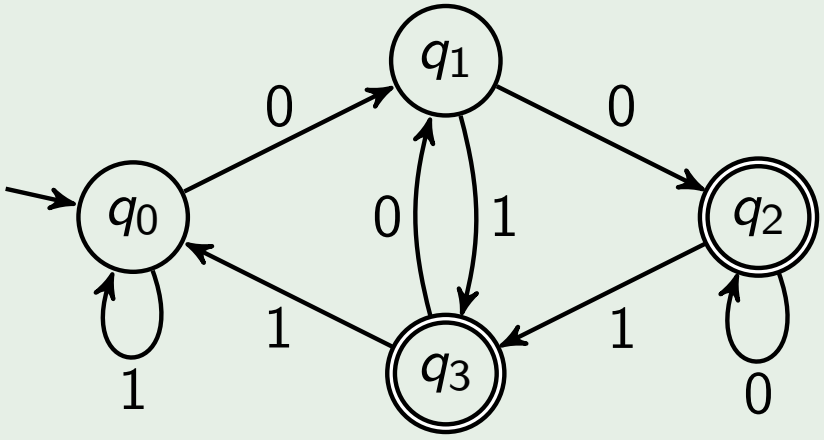
$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Z\ \exists\, q_n \in E : \\ &\qquad \delta(q_{i-1}, x_i) = q_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \ldots, q_n \in V : \\ &\qquad q_{i-1} \to x_i q_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } q_n \to \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \ldots, q_n \in V : \\ &\qquad q_0 \Rightarrow^i x_1 \cdots x_i q_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } q_n \to \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in L(G) \end{aligned}$$

□

Reguläre Grammatiken

Beispiel

Für den DFA



erhalten wir die Grammatik $G = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ mit

$$
\begin{aligned}
P: \quad & q_0 \to 1q_0,\ 0q_1, \\
& q_1 \to 0q_2,\ 1q_3, \\
& q_2 \to 0q_2,\ 1q_3,\ \varepsilon, \\
& q_3 \to 0q_1,\ 1q_0,\ \varepsilon.
\end{aligned}
$$

◁

Reguläre Grammatiken

- Offensichtlich lässt sich obige Konstruktion einer Grammatik G aus einem DFA M umdrehen, falls G keine Regeln der Form $A \to a$ enthält.
- Für den Beweis der Rückrichtung genügt es daher, alle Regeln dieser Form zu eliminieren.

Lemma

Zu jeder regulären Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik G', die keine Regeln der Form $A \to a$ hat.

Beweis

Betrachte die Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit

$$V' = V \cup \{X_{neu}\} \text{ und}$$

$$P' = \{A \to aX_{neu} \mid A \to_G a\} \cup \{X_{neu} \to \varepsilon\} \cup P \setminus (V \times \Sigma).$$

□

Reguläre Grammatiken

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$\begin{aligned} P: \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\ & B \to aC,\ bA,\ b, \\ & C \to aA,\ bB,\ a. \end{aligned}$$

- Wir ersetzen die Regeln $B \to b$ und $C \to a$ durch die Regeln $B \to bD$ und $C \to aD$ und fügen die Regel $D \to \varepsilon$ hinzu.
- Damit erhalten wir die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ mit

$$\begin{aligned} P': \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\ & B \to aC,\ bA,\ bD, \\ & C \to aA,\ bB,\ aD, \\ & D \to \varepsilon. \end{aligned}$$

Reguläre Grammatiken

Beweis von $\{L(G) \mid G \text{ ist eine reguläre Grammatik}\} \subseteq \text{REG}$

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik, die keine Regeln der Form $A \to a$ enthält.
- Drehen wir obige Konstruktion einer Grammatik aus einem DFA um, so erhalten wir den NFA

  $$M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$$

  mit $Z = V$, $\delta(A, a) = \{B \mid A \to_G aB\}$ und $E = \{A \mid A \to_G \varepsilon\}$.
- Genau wie oben folgt dann $L(M) = L(G)$. □

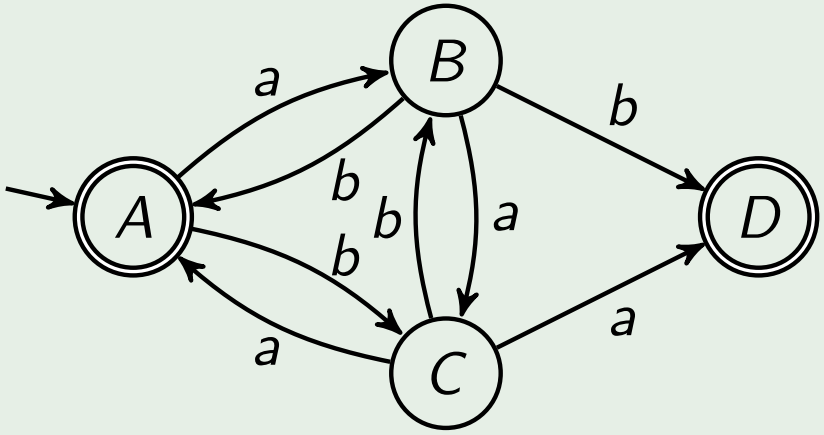
Reguläre Grammatiken

Beispiel (Fortsetzung)

Die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ mit

$$
\begin{aligned}
P' : \quad & A \to aB,\ bC,\ \varepsilon, \\
& B \to aC,\ bA,\ bD, \\
& C \to aA,\ bB,\ aD, \\
& D \to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

führt auf den NFA



◁

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär,
- es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index,
- es gibt eine reguläre Grammatik G mit $L = L(G)$.

Das Pumping-Lemma

Frage

Wie lässt sich möglichst einfach zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist?

Antwort

Oft führt die Kontraposition folgender Aussage zum Ziel.

Satz (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl $l \geq 0$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ und
3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Das kleinste solche l wird auch die Pumping-Zahl von L genannt.

Das Pumping-Lemma

Beispiel

- Die Sprache

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

  lässt sich „pumpen“ (mit Pumping-Zahl $l = 3$).

- Sei $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq 3$.
  - 1. Fall: x hat das Präfix $\underline{ab}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = ab$.
  - 2. Fall: x hat das Präfix $a\underline{ab}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = a$ und $v = ab$.
  - 3. Fall: x hat das Präfix $\underline{aaa}$.
    Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aaa$.
  - Restliche Fälle (Präfixe $\underline{ba}$, $b\underline{ba}$ und $\underline{bbb}$): analog.

Das Pumping-Lemma

Beispiel

- Eine endliche Sprache L lässt sich wie folgt „pumpen“.
- Sei

$$l = \begin{cases} 0, & L = \emptyset, \\ 1 + \max_{x \in L} |x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Dann lässt sich jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ „pumpen“ (da solche Wörter gar nicht existieren).
- Zudem gibt es im Fall $l > 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $l - 1$, das sich nicht „pumpen“ lässt.
- Also hat L die Pumping-Zahl l.

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ und
3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Das kleinste solche l wird auch die Pumping-Zahl von L genannt.

Das Pumping-Lemma

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik für L, die keine Regeln der Form $A \to a$ enthält, und sei

$$\underline{A_0} \Rightarrow x_1\underline{A_1} \Rightarrow x_1x_2\underline{A_2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_1x_2\cdots x_n\underline{A_n} \Rightarrow x_1x_2\cdots x_n$$

  eine beliebige Ableitung von $x = x_1 \cdots x_n \in L$ aus $A_0 = S$.

- Ist $|x| \geq l := \|V\|$, so muss unter $A_0, \ldots, A_l$ eine Variable A mehrfach vorkommen, d.h. es ex. $0 \leq j < k \leq l$ mit $A_j = A_k = A$.

- Somit können wir die Ableitung von x wie folgt zerlegen:

$$A_0 \Rightarrow^j x_1 \cdots x_j A_j = uA \Rightarrow^{k-j} ux_{j+1} \cdots x_k A_k = uvA \Rightarrow^{n+1-k} uvw,$$

  wobei $u = x_1 \cdots x_j$, $v = x_{j+1} \cdots x_k$ und $w = x_{k+1} \cdots x_n$ ist.

- Dann gilt $|v| = k - j \geq 1$ (d.h. $v \neq \varepsilon$), $k = |uv| \leq l$ und für $i \geq 0$ zeigt die Ableitung

$$A_0 \Rightarrow^j uA \Rightarrow^{(k-j)i} uv^iA \Rightarrow^{n+1-k} uv^iw,$$

  dass $uv^iw \in L$ ist. □

Das Pumping-Lemma

Alternativbeweis über DFA.

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit l Zuständen und sei $x = x_1 \cdots x_n \in L$ mit $n = |x| \geq l$.
- Dann muss $M(x)$ nach spätestens l Schritten einen Zustand zum zweiten Mal annehmen, d.h. es ex. $0 \leq j < k \leq l$ und $z \in Z$ mit

$$\hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_j) = z \text{ und}$$

$$\hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_j x_{j+1} \cdots x_k) = z.$$

- Setze $u = x_1 \cdots x_j$, $v = x_{j+1} \cdots x_k$ und $w = x_{k+1} \cdots x_n$.
- Dann gilt $|v| = k - j \geq 1$ (d.h. $v \neq \varepsilon$), $k = |uv| \leq l$.
- Zudem gehört für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i w$ zu L, da wegen $\hat{\delta}(z, v) = z$

$$\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{z}, v^i), w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(z, v^i)}_{z}, w) = \hat{\delta}(q_0, x)$$

in E ist. □

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

Die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

ist nicht regulär:

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L das Wort $x = a^l b^l$ mit $|x| = 2l \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ von $x = a^l b^l$ mit
  1. $v \neq \varepsilon$

  ist die Bedingung
  3. $uv^i w \in L$

  für alle $i \geq 2$ verletzt.

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel ($L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$)

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L ein Wort x mit $|x| = l^2 \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ mit $|u| = r$, $|v| = s$, $|w| = t$ und
  1. $v \neq \varepsilon$ (d.h. $s \geq 1$) sowie
  2. $|uv| \leq l$ (d.h. $r + s \leq l$)

  ist die Bedingung
  3. $uv^2w \in L$

  verletzt, da $r + 2s + t = l^2 + s$ keine Quadratzahl ist:

$$l^2 < l^2 + s < l^2 + l + 1 \leq (l+1)^2.$$

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Um also $L \notin \text{REG}$ zu zeigen, genügt es,

- für jede Zahl $l \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ zu finden, so dass
- für jede Zerlegung $x = uvw$ mindestens eine der folgenden drei Bedingungen verletzt ist:
  1. $v \neq \varepsilon$,
  2. $|uv| \leq l$ oder
  3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel ($L = \{a^p \mid p \text{ prim}\} \notin \text{REG}$)

- Für jede Zahl $l \geq 0$ enthält L ein Wort x mit $|x| = p \geq l$.
- Für jede Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| = s$ und
  1. $v \neq \varepsilon$ (d.h. $s \geq 1$)

  ist die Bedingung
  3. $uv^i w \in L$

  wegen

  $$|uv^i w| = p + (i-1)s$$

  für $i = p + 1$ verletzt, da dann

  $$|uv^i w| = p + ps = p(s+1)$$

  ist.

Grenzen des Pumping-Lemmas

Bemerkung

- Mit dem Pumping-Lemma können nicht alle Sprachen $L \notin \text{REG}$ als nicht regulär nachgewiesen werden, da seine Umkehrung falsch ist.
- Betrachte die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}.$$

- Da jedes Wort $x \in L$ mit Ausnahme von ε „gepumpt“ werden kann, hat L die Pumping-Zahl 1.
- Allerdings ist L nicht regulär (siehe Übungen).

Kontextfreie Sprachen

Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist folgende Sprache nicht regulär:

  $$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

- Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

  $$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S).$$

- Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist:

  $$\text{REG} \subsetneq \text{CFL}.$$

- Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

  $$\text{CFL} \subsetneq \text{CSL}.$$

Kontextfreie Sprachen sind auch kontextsensitiv

- Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \to \alpha$ haben.
- Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε-Regeln der Form $A \to \varepsilon$ zu.
- Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε-Regel $S \to \varepsilon$ haben.
- Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.
- Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv.
- Wir werden jedoch sehen, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextsensitive Grammatik konstruieren lässt.

Entfernen von ε-Regeln

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Zuerst berechnen wir die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller *ε-ableitbaren* Variablen:

```
1  E' := {A ∈ V | A → ε}
2  repeat
3     E := E'
4     E' := E ∪ {A ∈ V | ∃ B_1, ..., B_k ∈ E : A → B_1 ··· B_k}
5  until E = E'
```

- Nun bilden wir P' wie folgt:

$$\left\{ A \to \alpha' \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es ex. eine Regel } A \to_G \alpha, \text{ so dass } \alpha' \neq \varepsilon \text{ aus } \alpha \text{ durch} \\ \text{Entfernen von beliebig vielen Variablen } A \in E \text{ entsteht} \end{array} \right\}.$$

□

Entfernen von ε-Regeln

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, T, U, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to aS, bXX; \quad Z \to \varepsilon, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

- Berechnung von E:

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

- Entferne $Z \to \varepsilon$ und füge $X \to a$ (wegen $X \to aS$), $Y \to b$ (wegen $Y \to bS$) und $Z \to c$ (wegen $Z \to cZ$) hinzu:

$$\begin{aligned} P': \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Die Chomsky-Hierarchie

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Korollar

$\text{REG} \subsetneq \text{CFL} \subseteq \text{CSL} \subseteq \text{RE}$.

Beweis

- Es ist nur noch die Inklusion $\text{CFL} \subseteq \text{CSL}$ zu zeigen.
- Nach obigem Satz ex. zu $L \in \text{CFL}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in \text{CSL}$.
- Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

$$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S, \varepsilon\}, S')$$

die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in \text{CSL}$. □

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Beweis

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und sei S eine neue Variable.
Dann erzeugen die kontextfreien Grammatiken

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$,

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

das Produkt $L(G_4) = L(G_1)L(G_2)$ und

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

die Sternhülle $L(G_1)^*$. □

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Frage

Ist die Klasse CFL auch abgeschlossen unter

- Durchschnitt und
- Komplement?

Antwort

Nein.

Hierzu müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, für dessen Beweis wir Grammatiken in Chomsky-Normalform benötigen.

Chomsky-Normalform

Definition

Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε-Regeln $A \to \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \to B$ loswerden.

Definition

Regeln der Form $A \to B$ heißen Variablenumbenennungen.

Entfernen von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

  $$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1.$$

  Hierzu entfernen wir diese Regeln aus P und ersetzen alle Vorkommen der Variablen $A_2, \ldots, A_k$ in den übrigen Regeln durch A_1.
  (Sollte sich unter den entfernten Variablen $A_2, \ldots, A_k$ die Startvariable S befinden, so sei A_1 die neue Startvariable.)

Entfernen von Variablenumbenennungen

Beispiel (Fortsetzung)

$$P\colon S \to aY, bX, Z; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc.$$

- Entferne den Zyklus $S \to Z \to S$ und ersetze alle Vorkommen von Z durch S:

$$S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U;$$
$$X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc.$$

Entfernen von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir alle Zyklen

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1.$$

- Nun werden wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen los, indem wir
  - eine Regel $A \to B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \to C$ mit B auf der linken Seite existiert,
  - diese Regel $A \to B$ aus P entfernen und
  - für jede Regel $B \to \alpha$ in P die Regel $A \to \alpha$ zu P hinzunehmen. $\square$

Entfernen von Variablenumbenennungen

Beispiel (Fortsetzung)

$S \to aY, bX, c, T, cS$; $Y \to b, bS, aYY$; $T \to U$;
$X \to a, aS, bXX$; $U \to abc$.

- Entferne die Regel $T \to U$ und füge die Regel $T \to abc$ hinzu (wegen $U \to abc$):

  $S \to aY, bX, c, T, cS$; $Y \to b, bS, aYY$; $T \to abc$;
  $X \to a, aS, bXX$; $U \to abc$.

- Entferne dann auch die Regel $S \to T$ und füge die Regel $S \to abc$ (wegen $T \to abc$) hinzu:

  $S \to abc, aY, bX, c, cS$; $Y \to b, bS, aYY$; $T \to abc$;
  $X \to a, aS, bXX$; $U \to abc$.

- Da T und U nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \to abc$ und $U \to abc$ weglassen:

  $S \to abc, aY, bX, c, cS$; $Y \to b, bS, aYY$; $X \to a, aS, bXX$. ◁

Chomsky-Normalform

Definition

Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.

Anwendungen der Chomsky-Normalform

- CNF-Grammatiken bilden die Basis für eine effiziente Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.
- Zudem ermöglichen sie den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Entfernen von ε-Regeln und von Variablenumbenennungen

Bereits gezeigt:

Korollar

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Regeln und ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Noch zu zeigen:

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne ε-Regeln und ohne Variablenumbenennungen für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Wir transformieren G wie folgt in eine CNF-Grammatik.
- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \to a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a, außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Ersetze jede Regel $A \to B_1 \cdots B_k$, $k \geq 3$, durch die $k-1$ Regeln

$$A \to B_1 A_1,\ A_1 \to B_2 A_2,\ \ldots,\ A_{k-3} \to B_{k-2} A_{k-2},\ A_{k-2} \to B_{k-1} B_k,$$

wobei $A_1, \ldots, A_{k-2}$ neue Variablen sind. □

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die Regeln

$$P\colon\ S \to abc, aY, bX, cS, c;\quad X \to aS, bXX, a;\quad Y \to bS, aYY, b.$$

- Ersetze a, b und c durch A, B und C (außer wenn sie alleine vorkommen) und füge die Regeln $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$ hinzu:

$$S \to ABC, AY, BX, CS, c;\quad X \to AS, BXX, a;$$
$$Y \to BS, AYY, b;\quad A \to a;\ B \to b;\ C \to c.$$

- Ersetze die Regeln $S \to ABC$, $X \to BXX$ und $Y \to AYY$ durch die Regeln $S \to AS'$, $S' \to BC$, $X \to BX'$, $X' \to XX$ und $Y \to AY'$, $Y' \to YY$:

$$S \to AS', AY, BX, CS, c;\quad S' \to BC;\quad X \to AS, BX', a;\quad X' \to XX;$$
$$Y \to BS, AY', b;\quad Y' \to YY;\quad A \to a;\ B \to b;\ C \to c.$$

◁

Syntaxbäume

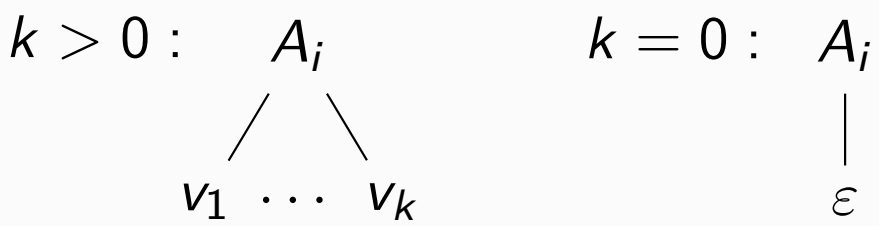
Definition

Wir ordnen einer Ableitung

$$\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

den Syntaxbaum (oder Ableitungsbaum, engl. *parse tree*) T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \ldots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:

- T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.
- Wird im $(i+1)$-ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \to v_1 \cdots v_k$ mit $v_1, \ldots, v_k \in \Sigma \cup V$ angewandt, so ensteht T_{i+1} aus T_i, indem wir das Blatt A_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:



- Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \cdots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$S$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow aSbS$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSbS$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbbS$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabbS$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

T_0: S

S

Syntaxbäume

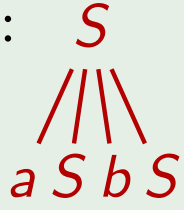
Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

T_1:



$$\underline{S} \Rightarrow aSbS$$

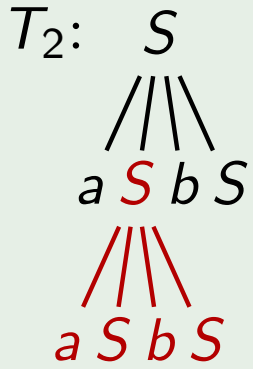
Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSbS$$

Syntaxbäume

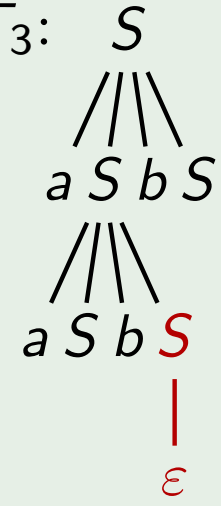
Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

T_3:



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbbS$$

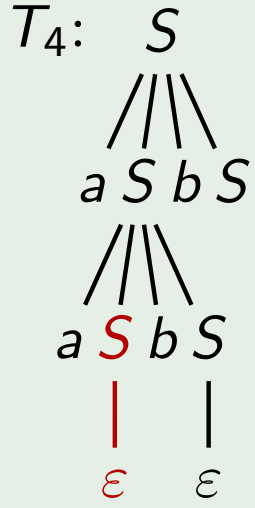
Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabbS$$

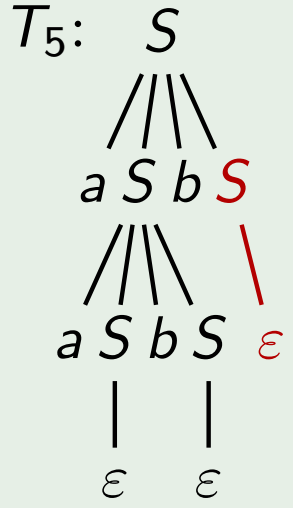
Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

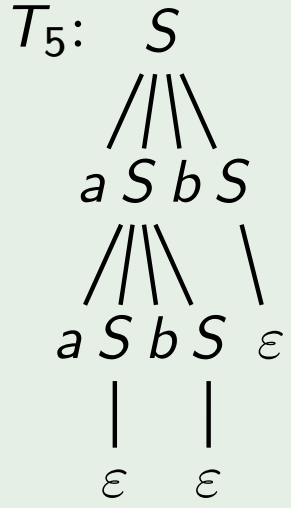
Syntaxbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

◁

Links- und Rechtsableitungen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

  heißt Linksableitung von α_m (kurz $S \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 1, \ldots, m-1$.

- Rechtsableitungen $S_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.
- G heißt mehrdeutig, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Linksableitungen hat.

Leicht zu sehen:

Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_R^* x$.

Syntaxbäume

Beispiel

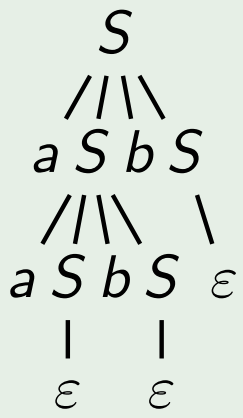
- Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ ist eindeutig.
- Dies liegt daran, dass in keiner Satzform von G die Variable S von einem a gefolgt wird.
- Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $\alpha S \beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, falls das Präfix α in x von einem a gefolgt wird.
- Dagegen ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ 2 verschiedene Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab.$$

Syntaxbäume

Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ führen insgesamt 8 Ableitungen auf den Syntaxbaum



$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aabSb\underline{S} \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$

◁

Syntaxbäume und Linksableitungen

- Seien $T_0, \ldots, T_m$ die zu einer Ableitung $S = \alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ gehörigen Syntaxbäume.
- Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i, indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen.
- Auf den Syntaxbaum T_m führen neben $\alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ alle Ableitungen, die sich von dieser nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden.
- Dazu gehört genau eine Linksableitung.
- Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig.
- Dasselbe gilt für Rechtsableitungen.
- Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein Binärbaum).

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Als erste Anwendung der Chomsky-Normalform beweisen wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$.
- Dann lässt sich jedes Wort $z = a^n b^n = a^{n-1} ab b^{n-1}$ in L mit $|z| \geq 2$ pumpen:
  - Zerlege z in $z = uvwxy$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \varepsilon$, $x = b$, $y = b^{n-1}$.
  - Dann ist für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i wx^i y = a^{n-1} a^i b^i b^{n-1} \in L$. ◁

Abschätzung der Blätterzahl bei Binärbäumen

Definition

Die Tiefe eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Pfadlänge von w zu einem Blatt.

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Beweis durch Induktion über k:

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $\leq k+1$.
Dann hängen an B's Wurzel maximal zwei Unterbäume.
Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV $\leq 2^k$ Blätter.
Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. $\square$

Mindesttiefe von Binärbäumen

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Korollar

Ein Binärbaum B mit mehr als 2^{k-1} Blättern hat mindestens die Tiefe k.

Beweis

Würde ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k-1$ mehr als 2^{k-1} Blätter besitzen, so stünde dies im Widerspruch zu obigem Lemma. $\square$

Beweis des Pumping-Lemmas

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \cdots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n - 1$ Regeln der Form $A \to BC$ und genau n Regeln der Form $A \to a$ angewandt.

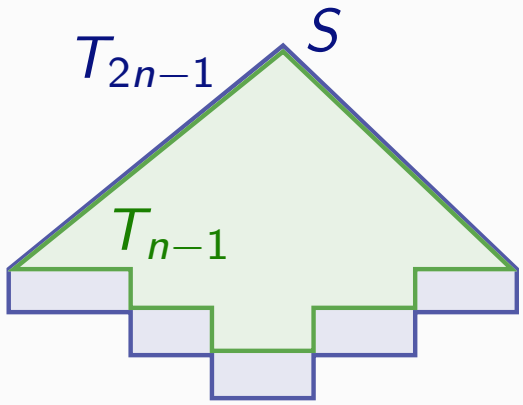
Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \cdots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

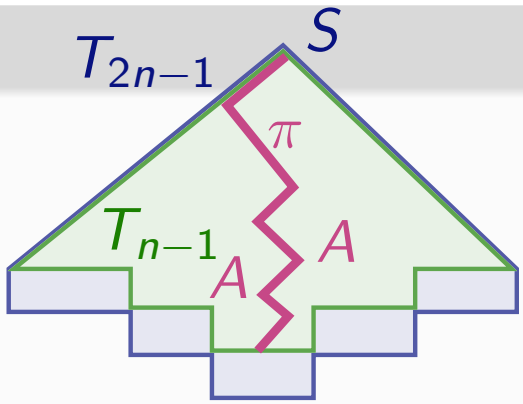
$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n-1$ Regeln der Form $A \to BC$ und genau n Regeln der Form $A \to a$ angewandt.
- Folglich ist $m = 2n-1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1}.
- Wir können annehmen, dass die $n-1$ Regeln der Form $A \to BC$ vor den n Regeln der Form $A \to a$ zur Anwendung kommen.
- Dann besteht α_{n-1} aus n Variablen und T_{n-1} hat wie T_{2n-1} genau n Blätter.
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k.

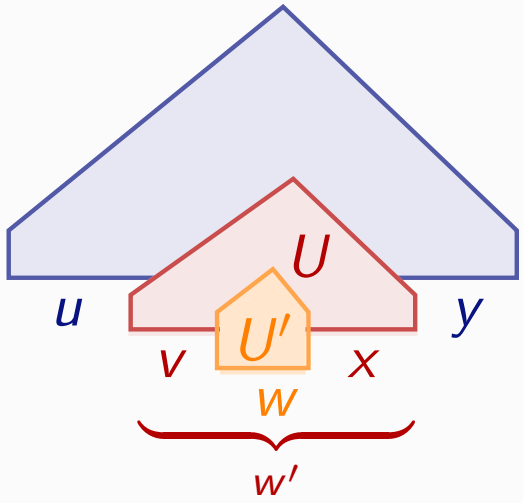


Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Fortsetzung)



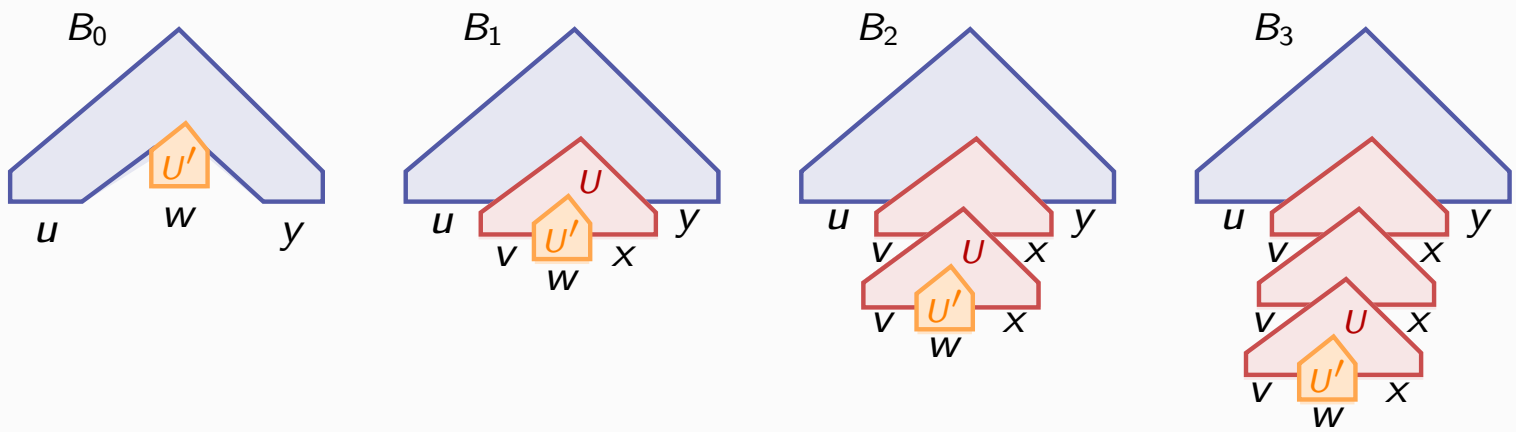
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k.
- Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1}.
- Dann hat π mindestens die Länge k und unter den letzten $k+1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.
- Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1}.
- Nun zerlegen wir z wie folgt:
  - w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und
  - w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird.



Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Schluss)

- Da U mehr Blätter hat als U', ist $vx \neq \varepsilon$ (Bedingung 1).
- Da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ höchstens die Tiefe k hat (andernfalls wäre π nicht maximal), hat U^* (und damit U) höchstens $2^k = l$ Blätter.
- Folglich ist $|vwx| \leq l$ (Bedingung 2).
- Schließlich lassen sich Syntaxbäume B_i für die Wörter $uv^i wx^i y$, $i \geq 0$, wie folgt konstruieren (Bedingung 3):
  - B_0 entsteht aus $B_1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen.
  - B_{i+1} entsteht aus B_i, indem wir U' durch U ersetzen:



□

Anwendung des Pumping-Lemmas

Beispiel

- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei.
- Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich $z = a^l b^l c^l$ die Länge $|z| = 3l \geq l$.
- Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen:

  Für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ gehört $z' = uv^2wx^2y$ nicht zu L:
  - Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z| < |z'|$.
  - Wegen $|vwx| \leq l$ kann in vx nicht jedes der drei Zeichen a, b, c vorkommen.
  - Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist

    $$\#_a(z') = \#_a(z) = l = |z|/3 < |z'|/3.$$

  - Also kann z' nicht zu L gehören. ◁

Abschlusseigenschaften von CFL

Wie wir gesehen haben, ist die Klasse CFL abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Produkt und
- Sternhülle.

Satz

CFL ist nicht abgeschlossen unter

- Durchschnitt und
- Komplement.

Abschlusseigenschaften von CFL

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{CFL} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \text{CFL}$

- Die beiden Sprachen

  $$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \text{ und } L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

  sind kontextfrei (siehe Übungen).
- Nicht jedoch ihr Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
- Also ist CFL nicht unter Durchschnitt abgeschlossen.

Beweis von $L \in \text{CFL} \not\Rightarrow \bar{L} \in \text{CFL}$

Da CFL zwar unter Vereinigung aber nicht unter Schnitt abgeschlossen ist, kann CFL wegen de Morgan nicht unter Komplement abgeschlossen sein.

Das Wortproblem für CFL

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Frage

Ist das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken effizient entscheidbar?

Der CYK-Algorithmus

Satz

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

Beweis

- Sei eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \cdots x_n$ gegeben.
- Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$ gilt.
- Hierzu genügt es, die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller ε-ableitbaren Variablen zu berechnen und zu prüfen, ob $S \in E$ ist.
- Andernfalls bringen wir G in CNF und starten den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus.
- Dieser bestimmt mittels dynamischer Programmierung für $l = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, n - l + 1$ die Menge $V_{l,k}$ aller Variablen, aus denen das Teilwort $x_k \cdots x_{k+l-1}$ ableitbar ist.
- Dann gilt $x \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{n,1}$.

Berechnung der Mengen $V_{l,k}$

Beweis (Schluss)

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik und sei $x \in \Sigma^+$.
- Dann lassen sich die Mengen

$$V_{l,k} = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \cdots x_{k+l-1}\}$$

  wie folgt bestimmen.
- Für $l = 1$ gehört A zu $V_{1,k}$, falls die Regel $A \to x_k$ existiert,

$$V_{1,k} = \{A \in V \mid A \to x_k\}.$$

- Für $l > 1$ gehört A zu $V_{l,k}$, falls eine Zahl $l' \in \{1, \ldots, l-1\}$ und eine Regel $A \to BC$ ex., so dass $B \in V_{l',k}$ und $C \in V_{l-l',k+l'}$ sind,

$$V_{l,k} = \{A \in V \mid \exists l' < l \; \exists B \in V_{l',k} \; \exists C \in V_{l-l',k+l'} : A \to BC\}.$$

- Jede Menge $V_{l,k}$ lässt sich in Zeit $O(l|G|) = O(n|G|)$ bestimmen.
- Da insgesamt $n(n+1)/2 = O(n^2)$ Mengen $V_{l,k}$ zu bestimmen sind, ist dies in Zeit $O(n^3|G|)$ möglich. □

Der CYK-Algorithmus

Algorithmus $\texttt{CYK}(G, x)$

```
1  Input: CNF-Grammatik G = (V, Σ, P, S) und Wort x = x_1 ··· x_n
2    for k := 1 to n do
3      V_{1,k} := {A ∈ V | A → x_k ∈ P}
4    for l := 2 to n do
5      for k := 1 to n − l + 1 do
6        V_{l,k} := ∅
7        for l' := 1 to l − 1 do
8          for all A → BC ∈ P do
9            if B ∈ V_{l',k} and C ∈ V_{l−l',k+l'} then
10             V_{l,k} := V_{l,k} ∪ {A}
11   if S ∈ V_{n,1} then accept else reject
```

- Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x bestimmt.

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1			
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$		
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2			
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$		
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

- Wegen $S \notin V_{3,1}$ ist $x \notin L(G)$.

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

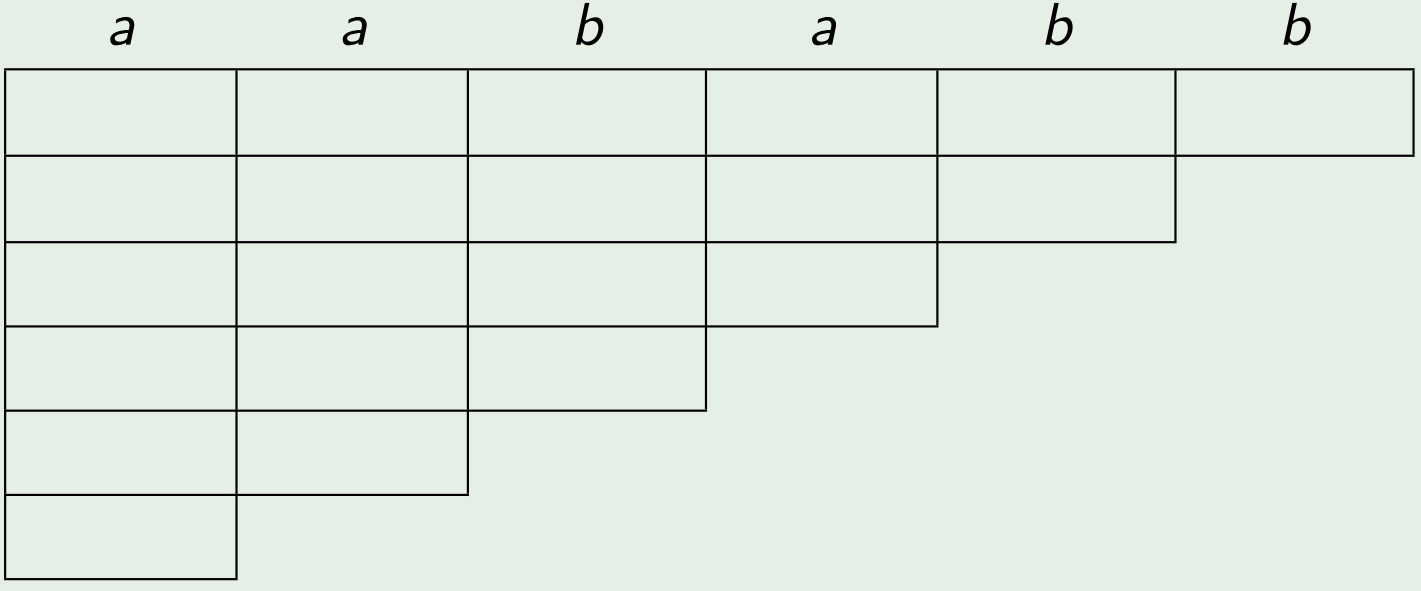
Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:



Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$				

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$				

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$				

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$					

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c.$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

Ein Maschinenmodell für die kontextfreien Sprachen

Frage

Wie lässt sich das Maschinenmodell des DFA erweitern, um die Sprache

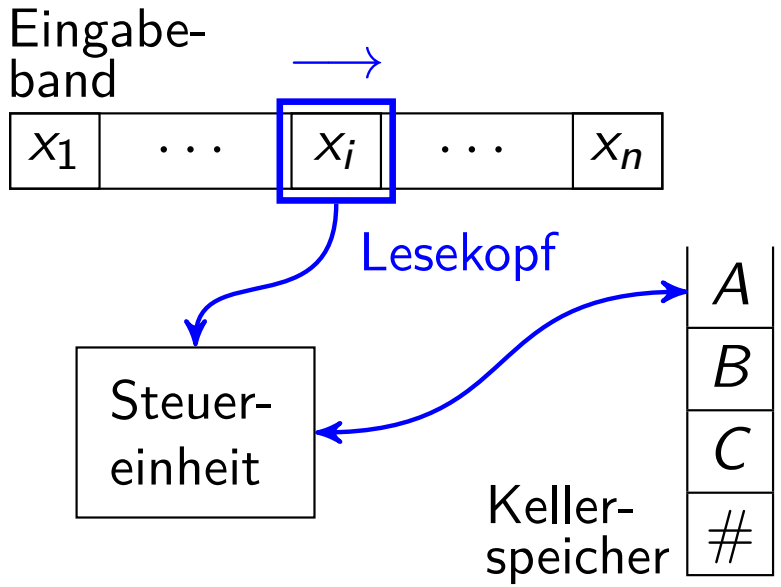
$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

und alle anderen kontextfreien Sprachen erkennen zu können?

Antwort

- Dass ein DFA die Sprache L nicht erkennen kann, liegt an seinem beschränkten Speichervermögen, das zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf.
- Um L erkennen zu können, genügt bereits ein so genannter Kellerspeicher (auch Stapel, engl. *stack* oder *pushdown memory*).
- Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse.

Der Kellerautomat



- verfügt zusätzlich über einen Kellerspeicher,
- kann auch ε-Übergänge machen,
- hat Lesezugriff auf das aktuelle Eingabezeichen und auf das oberste Kellersymbol,
- kann das oberste Kellersymbol löschen (durch eine pop-Operation) und
- danach beliebig viele Symbole einkellern (mittels push-Operationen).

Formale Definition des Kellerautomaten

Notation

Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, d.h.

$$\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}.$$

Definition

Ein Kellerautomat (kurz: PDA, engl. *pushdown automaton*) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- Γ das Kelleralphabet,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die Überführungsfunktion,
- $q_0 \in Z$ der Startzustand und
- $\# \in \Gamma$ das Kelleranfangszeichen ist.

Der Kellerautomat

Arbeitsweise eines PDA

- Wenn p der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(q, B_1 \cdots B_k) \in \delta(p, u, A)$
  - in den Zustand q wechseln,
  - den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u| \in \{0, 1\}$ Positionen vorrücken und
  - das Zeichen A aus- sowie die Zeichenfolge $B_1 \cdots B_k$ einkellern (danach ist B_1 das oberste Kellerzeichen).
- Hierfür sagen wir auch, M führt die Anweisung

  $$puA \to qB_1 \cdots B_k$$

  aus.
- Im Fall $u = \varepsilon$ spricht man auch von einem ε-Übergang.

Formale Definition der Konfiguration eines PDA

Definition

- Eine Konfiguration wird durch ein Tripel

  $$K = (p, x_i \cdots x_n, A_1 \cdots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

  beschrieben und besagt, dass
  - p der momentane Zustand,
  - $x_i \cdots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
  - $A_1 \cdots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 ist oberstes Symbol).
- In der Konfiguration $K = (p, x_i \cdots x_n, A_1 \cdots A_l)$ kann M eine bel. Anweisung $puA_1 \to qB_1 \cdots B_k$ mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$ ausführen.

  Diese überführt M in die Folgekonfiguration

  $$K' = (q, x_j \cdots x_n, B_1 \cdots B_k A_2 \cdots A_l) \text{ mit } j = i + |u|.$$

  Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$.
- Eine Rechnung von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \ldots$ mit $K_0 = (q_0, x, \#)$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots$.

  K_0 heißt Startkonfiguration von M bei Eingabe x.

Definition der von einem PDA erkannten Sprache

Notation

Die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir wie üblich mit $\vdash^*$.

Definition

Die von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, q \in Z : (q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Bemerkung

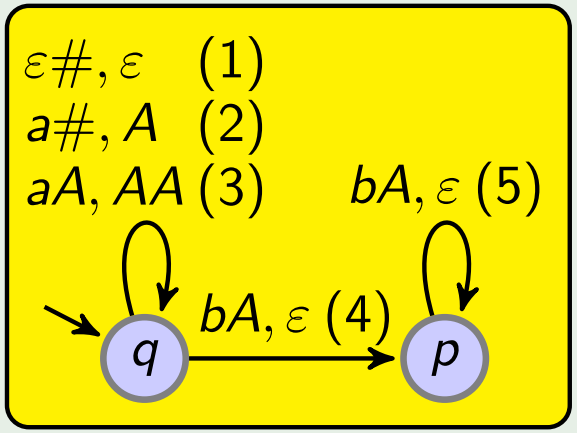
- Ein PDA M akzeptiert also genau dann eine Eingabe x, wenn es eine Rechnung gibt, bei der M
  - das gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und
  - den Keller leert.
- Man beachte, dass bei leerem Keller kein weiterer Übergang mehr möglich ist.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

  $\delta : q\varepsilon\# \to q\ (1)\quad qa\# \to qA\ (2)\quad qaA \to qAA\ (3)$
  $qbA \to p\ (4)\quad pbA \to p\quad (5)$



- Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$(q, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (q, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (p, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

- Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

  $n = 0$: $(q, \varepsilon, \#) \underset{(1)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon).$

  $n \geq 1$: $(q, a^n b^n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, a^{n-1} b^n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{n-1} (q, b^n, A^n)$
  $\underset{(4)}{\vdash} (p, b^{n-1}, A^{n-1}) \underset{(5)}{\vdash}^{n-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$

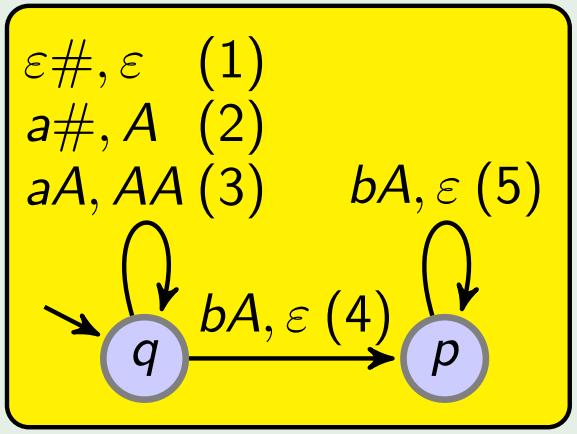
- Dies zeigt, dass M alle Wörter der Form $a^n b^n$, $n \geq 0$, akzeptiert.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta : q\varepsilon\# \to q\ (1) \quad qa\# \to qA\ (2) \quad qaA \to qAA\ (3)$$
$$qbA \to p\ (4) \quad pbA \to p \quad (5)$$



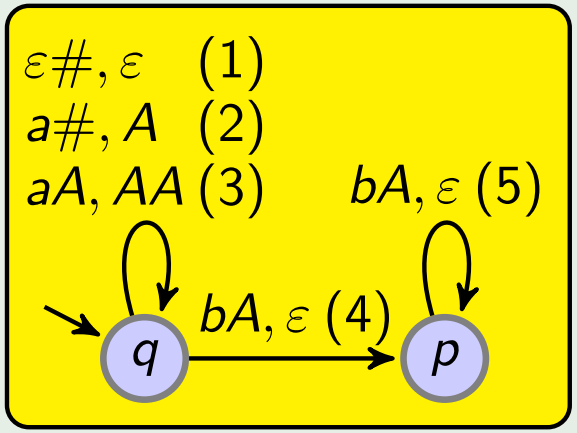
- Als nächstes zeigen wir, dass jede von M akzeptierte Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L(M)$ die Form $x = a^m b^m$ haben muss.
- Ausgehend von der Startkonfiguration $(q, x, \#)$ sind nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar.
- Führt M zuerst Anweisung (1) aus, so wird der Keller geleert.
- Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \varepsilon = a^0 b^0$ akzeptieren.
- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta : q\varepsilon\# \to q\ (1) \quad qa\# \to qA\ (2) \quad qaA \to qAA\ (3)$$
$$qbA \to p\ (4) \quad pbA \to p \quad (5)$$



- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.
- Dies geschieht, sobald M nach Lesen von $m \geq 1$ a's das erste b liest:

$$(q, x_1 \cdots x_n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, x_2 \cdots x_n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{m-1} (q, x_{m+1} \cdots x_n, A^m)$$
$$\underset{(4)}{\vdash} (p, x_{m+2} \cdots x_n, A^{m-1})$$

  mit $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = a$ und $x_{m+1} = b$.

- Um den Keller leeren zu können, muss M nun noch genau $m - 1$ b's lesen, weshalb x auch in diesem Fall die Form $a^m b^m$ haben muss. ◁

Ein Maschinenmodell für die Klasse CFL

Ziel

Als nächstes wollen wir zeigen, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen.

Satz

$\mathrm{CFL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$.

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$

Idee:

- Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

$$S \Rightarrow^* x_1 \cdots x_n \quad \text{gdw.} \quad (q, x_1 \cdots x_n, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

- Hierzu fügen wir folgende Anweisungen zu δ hinzu:

  für jede Regel $A \to_G \alpha$: $\quad q\varepsilon A \to q\alpha$,

  für jedes Zeichen $a \in \Sigma$: $\quad qaa \to q\varepsilon$.

- M versucht also, eine Linksableitung für die Eingabe x zu finden.
- Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet.
- Dann gilt $S \Rightarrow_L^l x_1 \cdots x_n$ gdw. $(q, x_1 \cdots x_n, S) \vdash^{l+n} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Daher folgt

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow (q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in L(M).$$

□

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln

  $$P\colon S \to aSbS \ (1), \quad S \to a \ (2).$$

- Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

  $$\delta : qaa \to q\varepsilon \quad (0) \qquad qbb \to q\varepsilon \quad (0')$$
  $$q\varepsilon S \to qaSbS \quad (1') \qquad q\varepsilon S \to qa \quad (2')$$

- Der Linksableitung $\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow} a\underline{S}bS \underset{(2)}{\Rightarrow} aab\underline{S} \underset{(2)}{\Rightarrow} aaba$ in G entspricht dann die Rechnung

  $$(q, aaba, S) \underset{(1')}{\vdash} (q, aaba, aSbS) \underset{(0)}{\vdash} (q, aba, SbS) \underset{(2')}{\vdash} (q, aba, abS)$$
  $$\underset{(0)}{\vdash} (q, ba, bS) \underset{(0')}{\vdash} (q, a, S) \underset{(2')}{\vdash} (q, a, a) \underset{(0)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

  von M und umgekehrt. ◁

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Idee:

- Konstruiere zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablen $X_{pAp'}$, $A \in \Gamma$, $p, p' \in Z$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

  $$(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^* x.$$

- Ein Wort x soll also genau dann in G aus $X_{pAp'}$ ableitbar sein, wenn M ausgehend vom Zustand p bei Lesen von x in den Zustand p' gelangen kann und dabei das Zeichen A aus dem Keller entfernt.
- Hierzu fügen wir für jede Anweisung $puA \to p_0 A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, die folgenden $\|Z\|^k$ Regeln zu P hinzu:

  Für jede Zustandsfolge $p_1, \ldots, p_k$: $X_{pAp_k} \to u X_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}$.

- Um damit alle Wörter $x \in L(M)$ aus S ableiten zu können, benötigen wir jetzt nur noch die Regeln

  $$S \to X_{q_0 \# p'}, \; p' \in Z.$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit den Anweisungen

$$\delta : p\varepsilon\# \to q\varepsilon \quad (1) \qquad pa\# \to pA \quad (2) \qquad paA \to pAA \quad (3)$$
$$pbA \to q\varepsilon \quad (4) \qquad qbA \to q\varepsilon \quad (5)$$

- Dann erhalten wir die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der Variablenmenge

$$V = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}.$$

- Die Regelmenge P enthält neben den beiden Startregeln

$$S \to X_{p\#p}, X_{p\#q} \quad (0, 0')$$

die folgenden Produktionen:

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- Die Regelmenge P enthält neben den beiden Startregeln

  $$S \to X_{p\#p}, X_{p\#q} \quad (0, 0')$$

  die folgenden Produktionen:

Anweisung	k	$p_1, \ldots, p_k$	zugehörige Regeln
$p\varepsilon\# \to q\varepsilon \quad (1)$	0	-	$X_{p\#q} \to \varepsilon \quad (1')$
$pa\# \to pA \quad (2)$	1	p	$X_{p\#p} \to aX_{pAp} \quad (2')$
		q	$X_{p\#q} \to aX_{pAq} \quad (2'')$
$paA \to pAA \quad (3)$	2	p, p	$X_{pAp} \to aX_{pAp}X_{pAp} \quad (3')$
		p, q	$X_{pAq} \to aX_{pAp}X_{pAq} \quad (3'')$
		q, p	$X_{pAp} \to aX_{pAq}X_{qAp} \quad (3''')$
		q, q	$X_{pAq} \to aX_{pAq}X_{qAq} \quad (3'''')$
$pbA \to q\varepsilon \quad (4)$	0	-	$X_{pAq} \to b \quad (4')$
$qbA \to q\varepsilon \quad (5)$	0	-	$X_{qAq} \to b \quad (5')$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Die Anweisungen

$$\delta : p\varepsilon\# \to q\varepsilon \quad (1) \qquad pa\# \to pA \quad (2) \qquad paA \to pAA \quad (3)$$
$$pbA \to q\varepsilon \quad (4) \qquad qbA \to q\varepsilon \quad (5)$$

  von M führen also auf die folgenden Regeln von G:

$$S \to X_{p\#p}, X_{p\#q} \quad (0, 0') \qquad X_{p\#q} \to \varepsilon \quad (1')$$
$$X_{p\#p} \to aX_{pAp} \quad (2') \qquad X_{p\#q} \to aX_{pAq} \quad (2'')$$
$$X_{pAp} \to aX_{pAp}X_{pAp} \quad (3') \qquad X_{pAq} \to aX_{pAp}X_{pAq} \quad (3'')$$
$$X_{pAp} \to aX_{pAq}X_{qAp} \quad (3''') \qquad X_{pAq} \to aX_{pAq}X_{qAq} \quad (3'''')$$
$$X_{pAq} \to b \quad (4') \qquad X_{qAq} \to b \quad (5')$$

- Der akzeptierenden Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

  von M entspricht dann in G die Linksableitung

$$\underline{S} \underset{(0')}{\Rightarrow} \underline{X_{p\#q}} \underset{(2'')}{\Rightarrow} a\underline{X_{pAq}} \underset{(3'''')}{\Rightarrow} aa\underline{X_{pAq}}X_{qAq} \underset{(4')}{\Rightarrow} aab\underline{X_{qAq}} \underset{(5')}{\Rightarrow} aabb.$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

- Für einen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ sei G die Grammatik (V, Σ, P, S) mit $V = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid p, q \in Z, A \in \Gamma\}$, wobei P neben den Regeln $S \to X_{q_0 \# p'}$, $p' \in Z$, für jede Anweisung

  $$puA \to p_0 A_1 \cdots A_k, \ k \geq 0$$

  von M und jede Zustandsfolge $p_1, \ldots, p_k$ die folgende Regel enthält:

  $$X_{pAp_k} \to u X_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}.$$

- Dann lässt sich mit Hilfe der Äquivalenz

  $$(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^* x,$$

  deren Beweis wir später nachholen, leicht die Korrektheit von G zeigen:

  $$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow (q_0, x, \#) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow S \Rightarrow X_{q_0 \# p'} \Rightarrow^* x \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow x \in L(G). \end{aligned}$$

Beweis von $(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gdw. $X_{pAp'} \Rightarrow^* x$

- Es bleibt zu zeigen, dass für alle $p, p' \in Z$, $A \in \Gamma$ und $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenz gilt:

$$(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^* x. \qquad (*)$$

- Hierzu zeigen wir durch Induktion über m folgende stärkere Behauptung:

$$(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^m x. \qquad (**)$$

Beweis von $(**)$ durch Induktion über m:

$m = 0$: Da weder $(p, x, A) \vdash^0 (p', \varepsilon, \varepsilon)$ noch $X_{pAp'} \Rightarrow^0 x$ gelten, ist die Äquivalenz $(**)$ für $m = 0$ erfüllt.

Beweis von $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gdw. $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$

$m \rightsquigarrow m+1$: Wir zeigen zuerst die Implikation von links nach rechts.

- Sei eine Rechnung der Länge $m+1$ gegeben:

$$(p, x, A) \vdash (p_0, x', A_1 \cdots A_k) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon).$$

- Sei $puA \to p_0 A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, die im ersten Rechenschritt ausgeführte Anweisung (d.h. $x = ux'$).
- Für $i = 1, \ldots, k$ sei p_i der Zustand, in den M mit Kellerinhalt $A_{i+1} \cdots A_k$ gelangt (d.h. $p_k = p'$).
- Dann enthält P die Regel $X_{pAp_k} \to u X_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}$.
- Zudem sei u_i für $i = 1, \ldots, k$ das Teilwort von x', das M zwischen den Besuchen von p_{i-1} und p_i liest.
- Dann ex. Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_k = m$ und

$$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für } i = 0, \ldots, k-1.$$

- Nach IV gibt es daher Ableitungen

$$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1}, \; i = 0, \ldots, k-1.$$

Beweis von $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gdw. $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$

Induktionsschritt für die Implikation von links nach rechts

- Nach IV gibt es daher Ableitungen

$$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1}, \ i = 0, \ldots, k-1,$$

die wir zu der gesuchten Ableitung zusammensetzen können:

$$\begin{array}{lll} X_{pAp_k} & \Rightarrow & uX_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-2} A_{k-1} p_{k-1}} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\ & \Rightarrow^{m_1} & uu_1 X_{p_1 A_2 p_2} \cdots X_{p_{k-2} A_{k-1} p_{k-1}} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\ & \vdots & \\ & \Rightarrow^{m_{k-1}} & uu_1 \cdots u_{k-1} X_{p_{k-1} A_k p_k} \\ & \Rightarrow^{m_k} & uu_1 \cdots u_k = x. \end{array}$$

Beweis von $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gdw. $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$

Induktionsschritt für die Implikation von rechts nach links

- Gelte nun umgekehrt $X_{pAp'} \Rightarrow^{m+1} x$ und sei α die im ersten Schritt abgeleitete Satzform, d.h. $X_{pAp'} \Rightarrow \alpha \Rightarrow^m x$.
- Wegen $X_{pAp'} \to_G \alpha$ gibt es eine Anweisung $puA \to p_0 A_1 \cdots A_k$, $k \geq 0$, und Zustände $p_1, \ldots, p_k \in Z$ mit

  $$\alpha = u\, X_{p_0 A_1 p_1} \cdots X_{p_{k-1} A_k p_k}, \text{ wobei } p_k = p' \text{ ist.}$$

- Wegen $\alpha \Rightarrow^m x$ ex. eine Zerlegung $x = u u_1 \cdots u_k$ und Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \cdots + m_k = m$ und

  $$X_{p_i A_{i+1} p_{i+1}} \Rightarrow^{m_{i+1}} u_{i+1} \; (i = 0, \ldots, k-1).$$

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

  $$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon), \; i = 0, \ldots, k-1.$$

Beweis von $(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$ gdw. $X_{pAp'} \Rightarrow^m x$

Induktionsschritt für die Implikation von rechts nach links

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

$$(p_i, u_{i+1}, A_{i+1}) \vdash^{m_{i+1}} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon), \ i = 0, \ldots, k-1,$$

aus denen sich die gesuchte Rechnung der Länge $m+1$ zusammensetzen lässt:

$$\begin{aligned}
(p, uu_1 \cdots u_k, A) \vdash & \quad (p_0, u_1 \cdots u_k, A_1 \cdots A_k) \\
\vdash^{m_1} & \quad (p_1, u_2 \cdots u_k, A_2 \cdots A_k) \\
& \ \vdots \\
\vdash^{m_{k-1}} & \quad (p_{k-1}, u_k, A_k) \\
\vdash^{m_k} & \quad (p_k, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}$$

□

Deterministische Kellerautomaten

Von besonderem Interesse sind kontextfreie Sprachen, die von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt werden.

Definition

- Ein Kellerautomat heißt deterministisch, falls $\vdash$ eine rechtseindeutige Relation ist:

$$K \vdash K_1 \ \wedge \ K \vdash K_2 \ \Rightarrow \ K_1 = K_2.$$

- Äquivalent hierzu ist, dass die Überführungsfunktion δ für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ folgende Bedingung erfüllt (siehe Übungen):

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

Deterministische Kellerautomaten

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#)$ mit

$$\begin{aligned}\delta\colon\quad & q_0a\# \to q_0A\# \quad & q_0b\# \to q_0B\# \quad & q_0aA \to q_0AA \quad & q_0bA \to q_0BA\\ & q_0aB \to q_0AB \quad & q_0bB \to q_0BB \quad & q_0cA \to q_1A \quad & q_0cB \to q_1B\\ & q_1aA \to q_1 \quad & q_1bB \to q_1 \quad & q_1\varepsilon\# \to q_2\end{aligned}$$

  Darstellung von δ in Tabellenform

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε	–	–	–	q_2	–	–	–	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	–	q_1	–	–	–	–
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	–	–	q_1	–	–	–
c	–	q_1A	q_1B	–	–	–	–	–	–

- Offenbar erkennt M die Sprache $L(M) = \{xcx^R \mid x \in \{a, b\}^+\}$.
- Man beachte, dass jedes Tabellenfeld höchstens eine Anweisung enthält und jede Spalte mit einem ε-Übergang keine weiteren Anweisungen enthält.
- Daher ist die Bedingung $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$ für alle $q \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ erfüllt. ◁

Deterministische Kellerautomaten

Frage

- Können deterministische Kellerautomaten zumindest alle regulären Sprachen durch Leeren des Kellers akzeptieren?
- Kann z.B. die Sprache $L = \{a, aa\}$ von einem deterministischen Kellerautomaten M durch Leeren des Kellers akzeptiert werden?

Antwort: Nein

- Um $x = a$ zu akzeptieren, muss M den Keller nach Lesen von a leeren und kann somit keine anderen Wörter mit dem Präfix a akzeptieren.
- Deterministische Kellerautomaten können also durch Leeren des Kellers nur präfixfreie Sprachen L akzeptieren (d.h. kein Wort $x \in L$ ist Präfix eines anderen Wortes in L).

Lösung des Problems

Wir vereinbaren, dass deterministische Kellerautomaten ihre Eingabe durch Erreichen eines Endzustands akzeptieren dürfen.

Deterministische Kellerautomaten

Definition

- Ein Kellerautomat mit Endzuständen wird durch ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ beschrieben.
- Dabei sind die Komponenten $Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#$ wie bei einem PDA.
- Zusätzlich ist $E \subseteq Z$ eine Menge von Endzuständen.
- Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, p \in E\, \exists\, \alpha \in \Gamma^* : (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \alpha)\}.$$

- M ist ein det. Kellerautomat mit Endzuständen (kurz: DPDA), falls M für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

- Weiter sei

$$\text{DCFL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DPDA}\}$$

(deterministic context free languages).

Charakterisierung von DCFL mittels Grammatiken

- Die Klasse DCFL lässt sich auch mit Hilfe von speziellen kontextfreien Grammatiken charakterisieren, den so genannten $LR(k)$-Grammatiken.
- Der erste Buchstabe L steht für die Leserichtung bei der Syntaxanalyse, d.h. das Eingabewort x wird von links (nach rechts) gelesen.
- Der zweite Buchstabe R bedeutet, dass bei der Syntaxanalyse eine Rechtsableitung entsteht.
- Schließlich gibt der Parameter k an, wieviele Zeichen man in der Eingabe vorauslesen muss, damit die nächste anzuwendende Regel eindeutig feststeht (k wird auch als *Lookahead* bezeichnet).
- Durch $LR(0)$-Grammatiken lassen sich nur die präfixfreien Sprachen in DCFL erzeugen.
- Dagegen erzeugen die $LR(k)$-Grammatiken für jedes $k \geq 1$ genau die Sprachen in DCFL.
- Daneben gibt es noch $LL(k)$-Grammatiken, die für wachsendes k immer mehr deterministisch kontextfreie Sprachen erzeugen.

Abschlusseigenschaften von DCFL

Frage

Ist DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen?

Antwort

Ja. Allerdings ergeben sich beim Versuch, einfach die End- und Nichtendzustände eines DPDA M zu vertauschen, um einen DPDA $\overline{M}$ für $\overline{L(M)}$ zu erhalten, folgende Schwierigkeiten:

1. Falls M eine Eingabe x nicht zu Ende liest, wird x weder von M noch von $\overline{M}$ akzeptiert.
2. Falls M nach dem Lesen von x noch ε-Übergänge ausführt und dabei End- und Nichtendzustände besucht, wird x von M und von $\overline{M}$ akzeptiert.

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Der nächste Satz zeigt, wie sich Problem 1 beheben lässt.

Satz

Jede Sprache $L \in \mathrm{DCFL}$ wird von einem DPDA M' erkannt, der alle Eingaben zu Ende liest.

Beweis.

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA mit $L(M) = L$.
Falls M eine Eingabe $x = x_1 \cdots x_n$ nicht zu Ende liest, muss einer der folgenden drei Gründe vorliegen:

1. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \cdots x_n, \varepsilon)$, $i \leq n$, mit leerem Keller.
2. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \cdots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, in der wegen $\delta(q, x_i, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$ keine Anweisung ausführbar ist.
3. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \cdots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, so dass M ausgehend von (q, ε, A) eine unendliche Folge von ε-Anweisungen ausführt.

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beweis (Fortsetzung)

- Die erste Ursache schließen wir aus, indem wir ein neues Zeichen $\square$ auf dem Kellerboden platzieren:

  (a) $s\varepsilon\# \to q_0\#\square$ (dabei sei s ein neuer Startzustand).

- Die zweite Ursache schließen wir durch Hinzunahme eines Fehlerzustands f sowie folgender Anweisungen aus:

  (b) $qaA \to fA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$ (hierbei ist $\Gamma' = \Gamma \cup \{\square\}$),

  (c) $faA \to fA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$.

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beweis (Fortsetzung)

- Als nächstes verhindern wir die Ausführung einer unendlichen Folge von ε-Übergängen.

  Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle, ob M hierbei auch Endzustände besucht oder nicht.

  (d) $q\varepsilon A \to fA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausführt ohne dabei einen Endzustand zu besuchen.

  Falls ja, sehen wir einen Umweg über den neuen Endzustand e vor.

  (e) $q\varepsilon A \to eA$
  $e\varepsilon A \to fA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausführt und dabei auch Endzustände besucht.

- Schließlich übernehmen wir von M noch

  (f) alle Anweisungen aus δ, soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (d) oder (e) überschrieben wurden.

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beweis (Schluss)

Um dies zu verhindern, transformieren wir $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ in den DPDA

$$M' = (Z \cup \{s, e, f\}, \Sigma, \Gamma', \delta', s, \#, E \cup \{e\}) \text{ mit } \Gamma' = \Gamma \cup \{\square\},$$

wobei δ' folgende Anweisungen enthält:

(a) $s\varepsilon\# \to q_0\#\square$,

(b) $qaA \to fA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$,

(c) $faA \to fA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$,

(d) $q\varepsilon A \to fA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt werden, ohne dass dabei ein Endzustand besucht wird.

(e) $q\varepsilon A \to eA$
$e\varepsilon A \to fA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt und dabei auch Endzustände besucht werden,

(f) alle Anweisungen aus δ, soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (c) oder (e) überschrieben wurden.

□

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beispiel

Wenden wir diese Konstruktion auf den DPDA

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$$

mit der Überführungsfunktion

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε	–	–	–	q_2	–	–	$q_2\#$	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	–	q_1	–	–	–	–
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	–	–	q_1	–	–	–
c	–	q_1A	q_1B	–	–	–	–	–	–

an, so erhalten wir den DPDA

$$M' = (\{q_0, q_1, q_2, s, e, f\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#, \square\}, \delta', s, \#, \{q_2, e\})$$

mit folgender Überführungsfunktion δ':

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beispiel (Schluss)

δ'	$q_0,\#$	q_0,A	q_0,B	$q_0,\square$	$q_1,\#$	q_1,A	q_1,B	$q_1,\square$	$q_2,\#$	q_2,A	q_2,B	$q_2,\square$
ε	–	–	–	–	q_2	–	–	–	$e\#$	–	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	$f\square$	–	q_1	fB	$f\square$	–	fA	fB	$f\square$
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	$f\square$	–	fA	q_1	$f\square$	–	fA	fB	$f\square$
c	$f\#$	q_1A	q_1B	$f\square$	–	fA	fB	$f\square$	–	fA	fB	$f\square$
Typ	(f,b)	(f)	(f)	(b)	(f)	(f,b)	(f,b)	(b)	(e)	(b)	(b)	(b)

	$s,\#$	s,A	s,B	$s,\square$	$f,\#$	f,A	f,B	$f,\square$	$e,\#$	e,A	e,B	$e,\square$
ε	$q_0\#\square$	–	–	–	–	–	–	–	$f\#$	–	–	–
a	–	–	–	–	$f\#$	fA	fB	$f\square$	–	–	–	–
b	–	–	–	–	$f\#$	fA	fB	$f\square$	–	–	–	–
c	–	–	–	–	$f\#$	fA	fB	$f\square$	–	–	–	–
Typ	(a)				(c)	(c)	(c)	(c)	(e)			

Komplementabschluss von DCFL

Satz

Die Klasse DCFL ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA, der alle Eingaben zu Ende liest, und sei $L(M) = L$.
- Wir konstruieren einen DPDA $\overline{M}$ für $\overline{L}$, der M simuliert.
- Dabei merkt sich $\overline{M}$ in seinem Zustand (q, i) neben dem aktuellen Zustand q von M in der Komponente i, ob M nach Lesen des letzten Zeichens (bzw. seit Rechnungsbeginn) einen Endzustand besucht hat $(i = 2)$ oder nicht $(i = 1)$.
- Möchte M das nächste Zeichen lesen und befindet sich $\overline{M}$ im Zustand $(q, 1)$, so macht $\overline{M}$ noch einen Umweg über den Endzustand $(q, 3)$.

Komplementabschluss von DCFL

Beweis (Schluss)

- Konkret sei $\overline{M} = (Z \times \{1,2,3\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, Z \times \{3\})$ mit

$$s = \begin{cases} (q_0, 1), & q_0 \notin E, \\ (q_0, 2), & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei δ' für jede Anweisung $q\varepsilon A \to_M p\gamma$ die Anweisungen

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,1)\varepsilon A \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E \text{ und} \\ &(q,2)\varepsilon A \to (p,2)\gamma, \end{aligned}$$

sowie für jede Anweisung $qaA \to_M p\gamma$ folgende Anweisungen enthält:

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \to (q,3)A, \\ &(q,2)aA \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,2)aA \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E, \\ &(q,3)aA \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E \text{ und} \\ &(q,3)aA \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\overline{M}$ in einem Endzustand keine ε-Übergänge macht. □

Komplementabschluss von DCFL

Beispiel

- Angenommen, ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ führt bei Eingabe $x = a$ folgende Rechnung aus:

  $$(q_0, a, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma_1) \vdash (q_2, \varepsilon, \gamma_2).$$

- Dann würde $\overline{M}$ im Fall $E = \{q_0, q_2\}$ (d.h. $x \in L(M)$) die Rechnung

  $$((q_0, 2), a, \#) \vdash ((q_1, 1), \varepsilon, \gamma_1) \vdash ((q_2, 2), \varepsilon, \gamma_2)$$

  ausführen und das Wort a verwerfen, da $(q_1, 1), (q_2, 2) \notin Z \times \{3\}$ sind.

- Im Fall $E = \{q_0\}$ (d.h. $x \notin L(M)$) würde $\overline{M}$ dagegen die Rechnung

  $$((q_0, 2), a, \#) \vdash ((q_1, 1), \varepsilon, \gamma_1) \vdash ((q_2, 1), \varepsilon, \gamma_2) \vdash ((q_2, 3), \varepsilon, \gamma_2)$$

  ausführen und das Wort a akzeptieren, da $(q_2, 3) \in Z \times \{3\}$ ist.

Komplementabschluss von DCFL

Definition

Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ bezeichne co-$\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in $\mathcal{C}$.

Korollar

- REG $=$ co-REG,
- DCFL $=$ co-DCFL,
- CFL $\neq$ co-CFL.

Weitere Abschlusseigenschaften von DCFL

Satz

Die Klasse DCFL ist nicht abgeschlossen unter Durchschnitt, Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{DCFL} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \text{DCFL}$

- Die beiden Sprachen

  $$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

  sind sogar deterministisch kontextfrei (siehe Übungen).
- Da $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist, liegt der Schnitt dieser Sprachen natürlich auch nicht in DCFL.

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{DCFL} \not\Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \text{DCFL}$

- Da DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist, kann DCFL wegen de Morgan dann auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein.
- Beispielsweise sind folgende Sprachen deterministisch kontextfrei:

  $$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}.$$

- Ihre Vereinigung gehört aber nicht zu DCFL, d.h.

  $$L_3 \cup L_4 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ oder } j \neq k\} \in \text{CFL} \setminus \text{DCFL}.$$

- DCFL ist nämlich unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen (siehe Übungen).
- Daher wäre mit $L_3 \cup L_4$ auch die Sprache

  $$(\overline{L_3 \cup L_4}) \cap L(a^* b^* c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

  (deterministisch) kontextfrei.

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{DCFL} \not\Rightarrow L_1 L_2 \in \text{DCFL}$

- Betrachte die DCFL Sprachen

$$L_0 = \{0\},\ L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}.$$

- Wir wissen bereits, dass $L_3 \cup L_4 \notin \text{DCFL}$ ist.
- Dann ist aber auch die Sprache

$$L_5 = L_0(L_3 \cup L_4) = \{0a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\} \notin \text{DCFL},$$

da sich ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ für L_5 leicht zu einem DPDA für $L_3 \cup L_4$ umbauen ließe:

- Sei (p, ε, γ) die Konfiguration, die M nach Lesen der Eingabe 0 erreicht.
- Dann erkennt der DPDA $M' = (Z \cup \{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, E)$ die Sprache $L_3 \cup L_4$, wobei δ' wie folgt definiert ist:

$$\delta'(q, u, A) = \begin{cases} (p, \gamma), & (q, u, A) = (s, \varepsilon, \#), \\ \delta(q, u, A), & (q, u, A) \in Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma. \end{cases}$$

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{DCFL} \not\Rightarrow L_1 L_2 \in \text{DCFL}$

- Betrachte die DCFL Sprachen

$$L_0 = \{0\},\ L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}.$$

- Es ist leicht zu sehen, dass auch die beiden Sprachen L_0^* und $L = L_0 L_3 \cup L_4$ in DCFL sind (siehe Übungen).
- Ihr Produkt $L_0^* L$ gehört aber nicht zu DCFL.
- Da DCFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen ist, wäre andernfalls auch die Sprache

$$L_0^* L \cap L_0 L(a^* b^* c^*) = \{0 a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\} = L_0(L_3 \cup L_4) = L_5$$

in DCFL, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Bemerkung

Dass DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist, lässt sich ganz ähnlich zeigen (siehe Übungen).

Abschlusseigenschaften

Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL und CFL

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	*ja*	*ja*	*ja*	*ja*	*ja*
DCFL	*nein*	*nein*	*ja*	*nein*	*nein*
CFL	*ja*	*nein*	*nein*	*ja*	*ja*

Die Chomsky-Hierarchie

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

1. G heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

   (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to aB$, $A \to a$ oder $A \to \varepsilon$)
2. G heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$. (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to \alpha$)
3. G heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $|v| \geq |u|$. (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, s. unten)
4. Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0.

Die ε-Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel $S \to \varepsilon$ zulässig.
Aber nur, wenn das Startsymbol S nur links vorkommt.

CFL ist echt in CSL enthalten

Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist CFL in CSL enthalten.
- Zudem ist folgende Sprache nicht kontextfrei:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

- L kann jedoch von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt werden.
- Daher ist CFL echt in CSL enthalten.

Eine kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln

$$P: \quad S \to aSBC, aBC \ (1,2) \quad CB \to BC \ (3) \quad aB \to ab \ (4)$$
$$bB \to bb \ (5) \qquad C \to c \ (6)$$

- In G lässt sich beispielsweise das Wort $w = aabbcc$ ableiten:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSBC \underset{(2)}{\Rightarrow} aaBCBC \underset{(3)}{\Rightarrow} aaBBCC$$
$$\underset{(4)}{\Rightarrow} aabBCC \underset{(5)}{\Rightarrow} aabbCC \underset{(6)}{\Rightarrow} aabbcC \underset{(6)}{\Rightarrow} aabbcc$$

- Allgemein gilt für alle $n \geq 1$:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow}^{n-1} a^{n-1}S(BC)^{n-1} \underset{(2)}{\Rightarrow} a^n(BC)^n \underset{(3)}{\Rightarrow}^{\binom{n}{2}} a^n B^n C^n$$
$$\underset{(4)}{\Rightarrow} a^n bB^{n-1}C^n \underset{(5)}{\Rightarrow}^{n-1} a^n b^n C^n \underset{(6)}{\Rightarrow}^{n} a^n b^n c^n$$

- Also gilt $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \geq 1$.

Eine kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

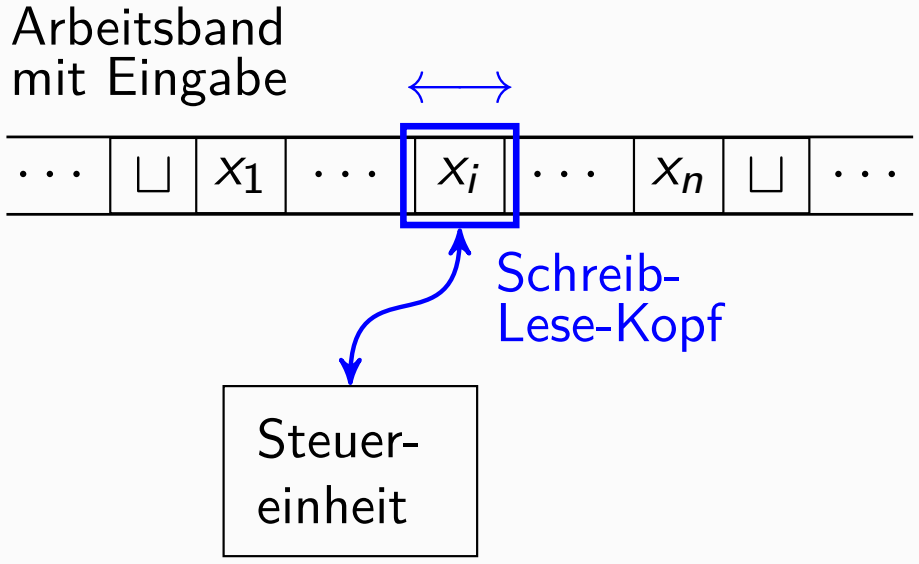
Beispiel (Schluss)

- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln

$$P: \quad S \to aSBC, aBC \ (1,2) \quad CB \to BC \ (3) \quad aB \to ab \ (4)$$
$$bB \to bb \ (5) \qquad C \to c \ (6)$$

- Umgekehrt folgt durch Induktion über die Ableitungslänge, dass jede Satzform u mit $S \Rightarrow^* u$ die folgenden Bedingungen erfüllt:
  - $\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$,
  - links von S kommen nur a's vor,
  - links von einem a kommen ebenfalls nur a's vor,
  - links von einem b kommen nur a's oder b's vor.
- Daraus ergibt sich, dass in G nur Wörter $w \in \Sigma^*$ der Form $w = a^n b^n c^n$ ableitbar sind, d.h. $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \text{CSL}$. ◁

Die Turingmaschine



- Um ein geeignetes Maschinenmodell für die kontextsensitiven Sprachen zu finden, führen wir zunächst das Rechenmodell der nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) ein.
- Eine NTM erhält ihre Eingabe auf einem nach links und rechts unbegrenzten Band.
- Während ihrer Rechnung kann sie den Schreib-Lese-Kopf auf dem Band in beide Richtungen bewegen und dabei die besuchten Bandfelder lesen sowie die gelesenen Zeichen gegebenenfalls überschreiben.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Definition

- Sei $k \geq 1$. Eine nichtdeterministische k-Band-Turingmaschine (k-NTM oder einfach NTM) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei
  - Z eine endliche Menge von Zuständen,
  - Σ das Eingabealphabet (mit $\sqcup \notin \Sigma$),
  - Γ das Arbeitsalphabet (mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$),
  - $\delta\colon Z \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$ die Überführungsfunktion,
  - q_0 der Startzustand und
  - $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist.
- Eine k-NTM M heißt deterministisch (kurz: M ist eine k-DTM oder einfach DTM), falls für alle $(q, a_1, \ldots a_k) \in Z \times \Gamma^k$ gilt:

$$\|\delta(q, a_1, \ldots a_k)\| \leq 1.$$

Das Rechenmodell der Turingmaschine

- Für $(q, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k) \in \delta(p, a_1, \ldots a_k)$ schreiben wir auch

  $$(p, a_1, \ldots, a_k) \to (q, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k).$$

- Eine solche Anweisung ist ausführbar, falls
  - p der aktuelle Zustand von M ist und
  - sich für $i = 1, \ldots, k$ der Lesekopf des i-ten Bandes auf einem mit a_i beschrifteten Feld befindet.
- Ihre Ausführung bewirkt, dass M
  - vom Zustand p in den Zustand q übergeht,
  - auf Band i das Symbol a_i durch b_i ersetzt und
  - den Kopf gemäß D_i bewegt (L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung).

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Definition

- Eine Konfiguration ist ein $(3k+1)$-Tupel

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

und besagt, dass

  - q der momentane Zustand ist und
  - das i-te Band mit $\ldots \sqcup u_i a_i v_i \sqcup \ldots$ beschriftet ist, wobei sich der Kopf auf dem Zeichen a_i befindet.

- Im Fall $k = 1$ schreiben wir für eine Konfiguration (q, u, a, v) auch kurz $uqav$.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Definition

Seien $K = (p, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$ und $K' = (q, u'_1, a'_1, v'_1, \ldots, u'_k, a'_k, v'_k)$ Konfigurationen. K' heißt Folgekonfiguration von K (kurz $K \vdash K'$), falls eine Anweisung

$$(p, a_1, \ldots, a_k) \to (q, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$

existiert, so dass für $i = 1, \ldots, k$ gilt:

im Fall $D_i = \mathrm{N}$:	$D_i = \mathrm{R}$:	$D_i = \mathrm{L}$:
K: u_i $\boxed{a_i}$ v_i K': u_i $\boxed{b_i}$ v_i $u'_i = u_i$, $a'_i = b_i$ und $v'_i = v_i$.	K: u_i $\boxed{a_i}$ v_i K': $u_i\ b_i$ $\boxed{a'_i}$ v'_i $u'_i = u_i b_i$ und $a'_i v'_i = \begin{cases} v_i, & v_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst.} \end{cases}$	K: u_i $\boxed{a_i}$ v_i K': u'_i $\boxed{a'_i}$ $b_i\ v_i$ $u'_i a'_i = \begin{cases} u_i, & u_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$ und $v'_i = b_i v_i$.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Definition

- Die Startkonfiguration von M bei Eingabe $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ ist

$$K_x = \begin{cases} (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \cdots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x \neq \varepsilon, \\ (q_0, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x = \varepsilon. \end{cases}$$

- Eine Rechnung von M bei Eingabe x ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \ldots$ mit $K_0 = K_x$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots$.
- Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, K \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k : K_x \vdash^* K\}.$$

- Ein Wort x wird also genau dann von M akzeptiert (kurz: $M(x)$ akzeptiert), wenn es eine Rechnung von M bei Eingabe x gibt, bei der ein Endzustand erreicht wird.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Beispiel

Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$ und den Anweisungen

δ:	$q_0 a \to q_1 AR$	(1)	Anfang der Schleife: Ersetze das erste a durch A
	$q_1 a \to q_1 aR$	(2)	Bewege den Kopf nach rechts bis zum ersten b
	$q_1 B \to q_1 BR$	(3)	und ersetze dies durch ein B (falls kein b mehr
	$q_1 b \to q_2 BL$	(4)	vorhanden ist, dann halte ohne zu akzeptieren).
	$q_2 a \to q_2 aL$	(5)	Bewege den Kopf nach links bis ein A kommt,
	$q_2 B \to q_2 BL$	(6)	gehe ein Feld nach rechts zurück und wiederhole
	$q_2 A \to q_0 AR$	(7)	die Schleife.
	$q_0 B \to q_3 BR$	(8)	Falls kein a am Anfang der Schleife, dann teste,
	$q_3 B \to q_3 BR$	(9)	ob noch ein b vorhanden ist. Wenn ja, dann halte
	$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$	(10)	ohne zu akzeptieren. Andernfalls akzeptiere.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{lllll}
\delta\colon & q_0 a \to q_1 AR \quad (1) & q_1 a \to q_1 aR \quad (2) & q_1 B \to q_1 BR \quad (3) \\
& q_1 b \to q_2 BL \quad (4) & q_2 a \to q_2 aL \quad (5) & q_2 B \to q_2 BL \quad (6) \\
& q_2 A \to q_0 AR \quad (7) & q_0 B \to q_3 BR \quad (8) & q_3 B \to q_3 BR \quad (9) \\
& q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N \quad (10) & &
\end{array}
$$

- Dann akzeptiert M die Eingabe $aabb$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
q_0 aabb &\underset{(1)}{\vdash} Aq_1 abb \underset{(2)}{\vdash} Aaq_1 bb \underset{(4)}{\vdash} Aq_2 aBb \underset{(5)}{\vdash} q_2 AaBb \\
&\underset{(7)}{\vdash} Aq_0 aBb \underset{(1)}{\vdash} AAq_1 Bb \underset{(3)}{\vdash} AABq_1 b \underset{(4)}{\vdash} AAq_2 BB \\
&\underset{(6)}{\vdash} Aq_2 ABB \underset{(7)}{\vdash} AAq_0 BB \underset{(8)}{\vdash} AABq_3 B \underset{(9)}{\vdash} AABBq_3 \sqcup \\
&\underset{10}{\vdash} AABBq_4 \sqcup
\end{aligned}
$$

- Ähnlich lässt sich für ein beliebiges $n \geq 1$ zeigen, dass $a^n b^n \in L(M)$ ist.

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Beispiel (Schluss)

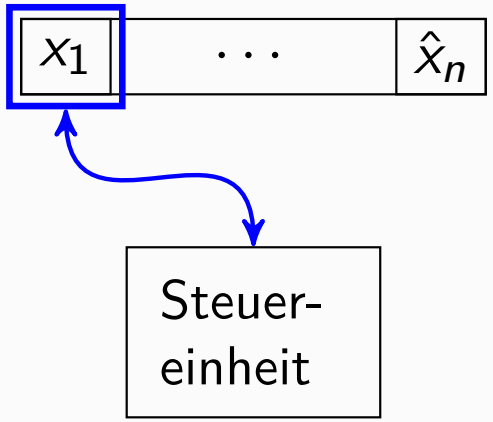
$$
\begin{array}{lllll}
\delta\colon & q_0 a \to q_1 AR \quad (1) & q_1 a \to q_1 aR \quad (2) & q_1 B \to q_1 BR \quad (3) \\
& q_1 b \to q_2 BL \quad (4) & q_2 a \to q_2 aL \quad (5) & q_2 B \to q_2 BL \quad (6) \\
& q_2 A \to q_0 AR \quad (7) & q_0 B \to q_3 BR \quad (8) & q_3 B \to q_3 BR \quad (9) \\
& q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N \quad (10) & &
\end{array}
$$

- Andererseits führt die Eingabe abb auf die Rechnung

$$q_0 abb \underset{(1)}{\vdash} A q_1 bb \underset{(4)}{\vdash} q_2 ABb \underset{(7)}{\vdash} A q_0 Bb \underset{(8)}{\vdash} AB q_3 b$$

- Da diese nicht fortsetzbar ist und da M deterministisch ist, kann $M(abb)$ nicht den Endzustand q_4 erreichen, d.h. abb gehört nicht zu $L(M)$.
- Tatsächlich lässt sich zeigen, dass $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist.
- In den Übungen werden wir eine 1-DTM für die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ konstruieren. ◁

Ein Maschinenmodell für CSL



- Es ist leicht zu sehen, dass jede Typ-0 Sprache von einer NTM M erkannt wird, die ausgehend von der Eingabe x eine Rückwärtsableitung (Reduktion) auf das Startsymbol sucht.
- Im Fall einer Typ-1 Sprache ist die linke Seite jeder Regel höchstens so lang wie die rechte Seite.
- Daher muss M in diesem Fall nur deshalb das Blank hinter x lesen, um das Ende der Eingabe erkennen zu können.
- Falls wir das letzte Zeichen x_n von x markieren, kann M jedoch die Rechnung auf den Bereich der Eingabe beschränken.
- NTMs mit dieser Eigenschaft werden auch als LBAs bezeichnet.

Linear beschränkte Automaten

Definition

- Für ein Alphabet Σ sei $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$ und für $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ sei
$$\hat{x} = \begin{cases} x, & x = \varepsilon, \\ x_1 \cdots x_{n-1}\hat{x}_n, & x \neq \varepsilon. \end{cases}$$
- Eine 1-NTM $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ heißt linear beschränkt (kurz: M ist ein LBA), falls gilt:
$$\forall x \in \Sigma^* : K_{\hat{x}} \vdash^* uqav \Rightarrow |uav| \leq \max\{|x|, 1\}.$$
- Die von einem LBA akzeptierte oder erkannte Sprache ist
$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(\hat{x}) \text{ akzeptiert}\}.$$

Bemerkung

Jede k-NTM, die bei Eingaben der Länge n höchstens linear viele (also $cn + c$ für eine Konstante c) Bandfelder besucht, kann von einem LBA simuliert werden.

Linear beschränkte Automaten

Beispiel

- Es ist nicht schwer, die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit

$$\begin{array}{lllll} \delta\colon & q_0 a \to q_1 AR \quad (1) & q_1 a \to q_1 aR \quad (2) & q_1 B \to q_1 BR \quad (3) \\ & q_1 b \to q_2 BL \quad (4) & q_2 a \to q_2 aL \quad (5) & q_2 B \to q_2 BL \quad (6) \\ & q_2 A \to q_0 AR \quad (7) & q_0 B \to q_3 BR \quad (8) & q_3 B \to q_3 BR \quad (9) \\ & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N \quad (10) & & \end{array}$$

  in einen deterministischen LBA (kurz: DLBA) $M' = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma', \delta', q_0, E)$ für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ umzuwandeln.

- Ersetze hierzu
  - Σ durch $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$,
  - Γ durch $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ sowie
  - die Anweisung $q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$ (10) durch $q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ (10′)

  und füge die Anweisungen $q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L$ (4a) und $q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ (8a) hinzu.

Linear beschränkte Automaten

Beispiel

- Ersetze hierzu
  - Σ durch $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$,
  - Γ durch $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ sowie
  - die Anweisung $q_3\sqcup \to q_4\sqcup N$ (10) durch $q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ (10′)

  und füge die Anweisungen $q_1\hat{b} \to q_2\hat{B}L$ (4a) und $q_0\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ (8a) hinzu:

$$
\begin{array}{llllll}
\delta': & q_0a \to q_1AR & (1) & q_1a \to q_1aR & (2) & q_1B \to q_1BR \quad (3) \\
 & q_1b \to q_2BL & (4) & q_1\hat{b} \to q_2\hat{B}L & (4a) & q_2a \to q_2aL \quad (5) \\
 & q_2B \to q_2BL & (6) & q_2A \to q_0AR & (7) & q_0B \to q_3BR \quad (8) \\
 & q_0\hat{B} \to q_4\hat{B}N & (8a) & q_3B \to q_3BR & (9) & q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N \quad (10')
\end{array}
$$

- Dann akzeptiert M' die Eingabe $aab\hat{b}$ wie folgt (d.h. $aabb \in L(M')$):

$$
q_0aab\hat{b} \vdash^* AABq_1\hat{b} \underset{(4a)}{\vdash} AAq_2B\hat{B} \vdash^* AABq_3\hat{B} \underset{(10')}{\vdash} AABq_4\hat{B}
$$

◁

Charakterisierung von CSL mittels LBAs

Als nächstes zeigen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

Satz

$\mathsf{CSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$.

Beweis von CSL $\subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $x = x_1 \cdots x_n$ mit $n > 0$:

1. Markiere das erste Eingabezeichen x_1
2. Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel $\alpha \to \beta$ aus P
3. Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band
   (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4. Ersetze die ersten $|\alpha|$ Zeichen von β durch α
5. Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war, markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6. Verschiebe die Zeichen rechts von β um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach links und überschreibe die frei werdenden Bandfelder mit Blanks
7. Enthält das Band außer Blanks nur das (markierte) Startsymbol, so halte in einem Endzustand
8. Gehe zurück zu Schritt 2

Beweis von CSL $\subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$

- Nun ist leicht zu sehen, dass M wegen $|\beta| \geq |\alpha|$ tatsächlich ein LBA ist.
- M akzeptiert x, falls es gelingt, eine Ableitung für x in G zu finden (in umgekehrter Reihenfolge, d.h. M ist ein nichtdeterministischer *Bottom-Up Parser*).
- Da sich genau für die Wörter in $L(G)$ eine Ableitung finden lässt, folgt $L(M) = L(G)$. □

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

- Sei $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ein LBA (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V \;=\; \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma,$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

P:	$S \to A(\hat{a}, a), (q_0\hat{a}, a)$		(S)	„Startregeln“
	$A \to A(a, a), (q_0 a, a)$		(A)	„A-Regeln“
	$(c, a) \to a$		(F)	„Finale Regeln“
	$(qc, a) \to a,$	falls $q \in E$	(E)	„E-Regeln“
	$(qc, a) \to (q'c', a),$	falls $qc \to_M q'c'N$	(N)	„N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \to (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \to_M q'c'R$	(R)	„R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \to (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \to_M q'c'L$	(L)	„L-Regeln“

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

Beispiel

- Betrachte den LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ und $E = \{q_4\}$, sowie

$$
\begin{array}{lll}
\delta\colon\ q_0 a \to q_1 AR & q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L & q_0 B \to q_3 BR \\
q_1 a \to q_1 aR & q_2 a \to q_2 aL & q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N \\
q_1 B \to q_1 BR & q_2 B \to q_2 BL & q_3 B \to q_3 BR \\
q_1 b \to q_2 BL & q_2 A \to q_0 AR & q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N
\end{array}
$$

- Die zugehörige kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ enthält dann neben den Start- und A-Regeln

$$
\begin{array}{ll}
S \to A(\hat{a}, a),\ A(\hat{b}, b),\ (q_0 \hat{a}, a),\ (q_0 \hat{b}, b) & (S_1\text{-}S_4) \\
A \to A(a, a),\ A(b, b),\ (q_0 a, a),\ (q_0 b, b) & (A_1\text{-}A_4)
\end{array}
$$

für jedes Zeichen $c \in \Gamma$ die F- und E-Regeln (wegen $E = \{q_4\}$)

$$
\begin{array}{ll}
(c, a) \to a,\ (c, b) \to b & (F_1\text{-}F_{16}) \\
(q_4 c, a) \to a,\ (q_4 c, b) \to b & (E_1\text{-}E_{16})
\end{array}
$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

Beispiel

- Die zugehörige kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ enthält dann neben den Start- und A-Regeln

$$S \to A(\hat{a}, a),\ A(\hat{b}, b),\ (q_0\hat{a}, a),\ (q_0\hat{b}, b) \qquad (S_1\text{-}S_4)$$
$$A \to A(a, a),\ A(b, b),\ (q_0 a, a),\ (q_0 b, b) \qquad (A_1\text{-}A_4)$$

für jedes Zeichen $c \in \Gamma$ die F- und E-Regeln (wegen $E = \{q_4\}$)

$$(c, a) \to a,\ (c, b) \to b \qquad (F_1\text{-}F_{16})$$
$$(q_4 c, a) \to a,\ (q_4 c, b) \to b \qquad (E_1\text{-}E_{16})$$

- Daneben enthält P beispielsweise noch folgende Regeln:
  - Für die Anweisung $q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ die N-Regeln

$$(q_3\hat{B}, a) \to (q_4\hat{B}, a),\quad (q_3\hat{B}, b) \to (q_4\hat{B}, b)$$

  - Für die Anweisung $q_1 b \to q_2 B L$ die L-Regeln (für jedes $d \in \Gamma$)

$$(d, a)(q_1 b, a) \to (q_2 d, a)(B, a),\quad (d, b)(q_1 b, a) \to (q_2 d, b)(B, a)$$
$$(d, a)(q_1 b, b) \to (q_2 d, a)(B, b),\quad (d, b)(q_1 b, b) \to (q_2 d, b)(B, b)$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

Beispiel

- Daneben enthält P beispielsweise noch folgende Regeln:
  - Für die Anweisung $q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ die N-Regeln

    $$(q_3\hat{B}, a) \to (q_4\hat{B}, a), \quad (q_3\hat{B}, b) \to (q_4\hat{B}, b)$$

  - Für die Anweisung $q_1 b \to q_2 BL$ die L-Regeln (für jedes $d \in \Gamma$)

    $$(d, a)(q_1 b, a) \to (q_2 d, a)(B, a), \quad (d, b)(q_1 b, a) \to (q_2 d, b)(B, a)$$
    $$(d, a)(q_1 b, b) \to (q_2 d, a)(B, b), \quad (d, b)(q_1 b, b) \to (q_2 d, b)(B, b)$$

  - Für die Anweisung $q_0 a \to q_1 AR$ die R-Regeln (für jedes $d \in \Gamma$)

    $$(q_0 a, a)(d, a) \to (A, a)(q_1 d, a), \quad (q_0 a, a)(d, b) \to (A, a)(q_1 d, b)$$
    $$(q_0 a, b)(d, a) \to (A, b)(q_1 d, a), \quad (q_0 a, b)(d, b) \to (A, b)(q_1 d, b)$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

- Sei $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ein LBA (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V \;=\; \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma,$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

$S \to A(\hat{a}, a)$		(S)	„Startregeln“
$A \to A(a, a),\ (q_0 a, a)$		(A)	„A-Regeln“
$(c, a) \to a$		(F)	„Finale Regeln“
$(qc, a) \to a,$	falls $q \in E$	(E)	„E-Regeln“
$(qc, a) \to (q'c', a),$	falls $qc \to_M q'c'N$	(N)	„N-Regeln“
$(qc, a)(d, b) \to (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \to_M q'c'R$	(R)	„R-Regeln“
$(d, a)(qc, b) \to (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \to_M q'c'L$	(L)	„L-Regeln“

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

- Durch Induktion über m lässt sich nun leicht für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$ und $q \in Z$ die folgende Äquivalenz beweisen:

$$q_0 x_1 \cdots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \cdots a_{i-1} q a_i \cdots a_n \text{ gdw.}$$

$$(q_0 x_1, x_1) \cdots (\hat{x}_n, x_n) \underset{(N,R,L)}{\Rightarrow}^m (a_1, x_1) \cdots (q a_i, x_i) \cdots (a_n, x_n)$$

- Ist also $q_0 x_1 \cdots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \cdots a_{i-1} q a_i \cdots a_n$ eine akzeptierende Rechnung von $M(x_1 \cdots x_{n-1} \hat{x}_n)$ mit $q \in E$, so folgt

$$S \underset{(S)}{\Rightarrow} A(\hat{x}_n, x_n) \underset{(A)}{\Rightarrow}^{n-1} (q_0 x_1, x_1)(x_2, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_{n-1})(\hat{x}_n, x_n)$$

$$\underset{(N,L,R)}{\Rightarrow}^m (a_1, x_1) \cdots (a_{i-1}, x_{i-1})(q a_i, x_i) \cdots (a_n, x_n) \underset{(F,E)}{\Rightarrow}^n x_1 \cdots x_n$$

- Die Inklusion $L(G) \subseteq L(M)$ folgt analog. □

Bemerkung

Eine einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass 1-NTMs genau die Sprachen vom Typ 0 akzeptieren (siehe Übungen).

Deterministisch kontextsensitive Sprachen

Definition

Die Klasse der deterministisch kontextsensitiven Sprachen ist definiert als

$$\text{DCSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DLBA}\}.$$

Bemerkung

- Der DLBA M' für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus obigem Beispiel lässt sich leicht in einen DLBA für die kontextsensitive Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ transformieren (siehe Übungen).
- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ liegt also in $\text{DCSL} \setminus \text{CFL}$.
- Bis heute ungelöst ist die Frage, ob die Klasse DCSL eine echte Teilklasse von CSL ist oder nicht?
- Diese Fragestellung ist als LBA-Problem bekannt.

Zusammenfassung der Abschlusseigenschaften

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja
DCSL	ja	ja	ja	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
RE	ja	ja	nein	ja	ja

- In der VL Komplexitätstheorie wird gezeigt, dass die Klasse CSL unter Komplementbildung abgeschlossen ist.
- Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Klasse RE nicht unter Komplementbildung abgeschlossen ist.
- Die übrigen Abschlusseigenschaften der Klassen DCSL, CSL und RE in obiger Tabelle werden in den Übungen bewiesen.

Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

Definition

- Eine NTM M hält bei Eingabe x, falls alle Rechnungen von $M(x)$ eine endliche Länge haben.
- Eine NTM M entscheidet eine Eingabe x, falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt entscheidbar, falls eine DTM M mit $L(M) = L$ existiert, die jede Eingabe $x \in \Sigma^*$ entscheidet.
- Jede von einer DTM M erkannte Sprache heißt semi-entscheidbar.

Bemerkung

- Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ heißt semi-entscheidbar, da M zwar alle Eingaben $x \in L$ entscheidet (aber eventuell nicht alle $x \in \bar{L}$).
- Später werden wir sehen, dass genau die Typ-0 Sprachen semi-entscheidbar sind.

Berechnung von totalen Funktionen

Definition

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

  $$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

  hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration) mit

  $$u_k = f(x).$$

- Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$.
- f heißt Turing-berechenbar (oder einfach berechenbar), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch rekursiv genannt.

Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

Definition

- Eine partielle Funktion hat die Form $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$.
- Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist undefiniert.
- Der Definitionsbereich (engl. *domain*) von f ist

  $$dom(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- Das Bild (engl. *image*) von f ist

  $$img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}.$$

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet f, falls $M(x)$ für alle $x \in dom(f)$ das Wort $f(x)$ ausgibt und für alle $x \notin dom(f)$ keine Ausgabe berechnet (d.h. $M(x)$ darf im Fall $x \notin dom(f)$ nicht halten).

Berechen- und Entscheidbarkeit

Wir fassen die entscheidbaren Sprachen und die (partiellen) berechenbaren Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$$\mathrm{REC} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die jede Eingabe entscheidet}\},$$
$$\mathrm{FREC} = \{f \mid f \text{ ist eine (totale) berechenbare Funktion}\},$$
$$\mathrm{FREC}_p = \{f \mid f \text{ ist eine partielle berechenbare Funktion}\}.$$

Dann gilt:

- $\mathrm{FREC} \subsetneq \mathrm{FREC}_p$ und
- $\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{DCFL} \subsetneq \mathrm{CFL} \subsetneq \mathrm{DCSL} \subseteq \mathrm{CSL} \subsetneq \mathrm{REC} \subsetneq \mathrm{RE}$.

Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

Beispiel

- Bezeichne x^+ den lexikografischen Nachfolger von $x \in \Sigma^*$.
- Für $\Sigma = \{0, 1\}$ ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

x	ε	0	1	00	01	10	11	000	...
x^+	0	1	00	01	10	11	000	001	...

- Betrachte die auf Σ^* definierten Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^+ \qquad \text{und} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \uparrow, & x = \varepsilon, \\ y, & x = y^+. \end{cases}$$

- Da f_1, f_2, f_3, f_4 berechenbar sind, gehören die totalen Funktionen f_1, f_2, f_3 zu FREC und die partielle Funktion f_4 zu FREC_p. ◁

Berechenbarkeit von charakteristischen Funktionen

Satz

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn ihre charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, falls ihre partielle charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1, \uparrow\}$ berechenbar ist:

$$\hat{\chi}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \uparrow, & x \notin A. \end{cases}$$

Beweis

Siehe Übungen.

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv aufzählbar, falls A leer oder das Bild $img(f)$ einer berechenbaren Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ ist.

Satz

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1. A ist semi-entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert),
2. A wird von einer 1-DTM akzeptiert,
3. A wird von einer 1-NTM akzeptiert,
4. A ist vom Typ 0,
5. A wird von einer NTM akzeptiert,
6. A ist rekursiv aufzählbar.

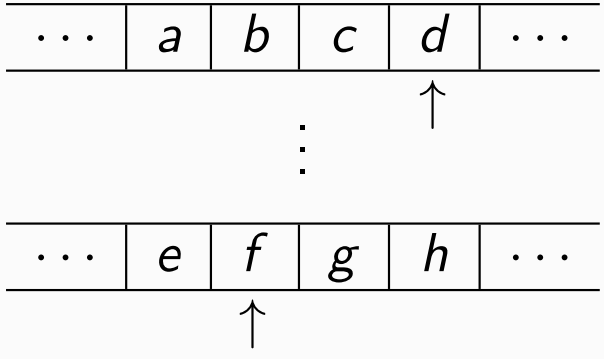
Beweis

Die Implikation 2 $\Rightarrow$ 3 ist klar. Die Implikationen 3 $\Rightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 5 werden in den Übungen gezeigt. Hier zeigen wir 1 $\Rightarrow$ 2 und 5 $\Rightarrow$ 6 $\Rightarrow$ 1.

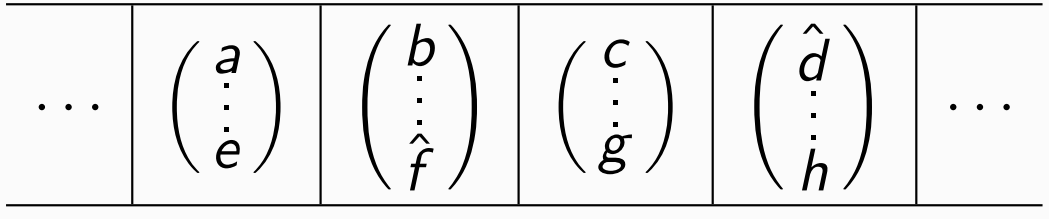
Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von ❶ ⇒ ❷: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-DTM mit $L(M) = A$.
- Wir konstruieren eine 1-DTM $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, E)$ für A.
- M' simuliert M, indem sie jede Konfiguration K von M der Form



durch eine Konfiguration K' folgender Form nachbildet:



Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von ❶ ⇒ ❷: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Das heißt, M' arbeitet mit dem Alphabet

$$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Gamma\})^k$$

- und erzeugt bei Eingabe $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$ zuerst die der Startkonfiguration

$$K_x = (q_0, \varepsilon, x, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup)$$

von M bei Eingabe x entsprechende Konfiguration

$$K'_x = q'_0 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\sqcup} \\ \vdots \\ \hat{\sqcup} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix}.$$

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von ❶ $\Rightarrow$ ❷: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Dann simuliert M' jeweils einen Schritt von M durch folgende Sequenz von Rechenschritten:
  - Zuerst geht M' solange nach rechts, bis sie alle mit $\hat{}$ markierten Zeichen (z.B. $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k$) gefunden hat.
  - Diese Zeichen speichert M' in ihrem Zustand.
  - Anschließend geht M' wieder nach links und realisiert dabei die durch $\delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ vorgegebene Anweisung von M.
  - Den aktuellen Zustand q von M speichert M' ebenfalls in ihrem Zustand.
- Sobald M in einen Endzustand übergeht, wechselt M' ebenfalls in einen Endzustand und hält.
- Nun ist leicht zu sehen, dass $L(M') = L(M)$ ist. $\square$

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von 5 $\Rightarrow$ 6: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine NTM}\} \subseteq \{L \mid L \text{ ist rek. aufzählbar}\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-NTM und sei $A = L(M) \neq \emptyset$.
- Sei $\tilde{\Gamma}$ das Alphabet $Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$.
- Wir kodieren eine Konfiguration $K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$ durch das Wort

  $$code(K) = \#q\#u_1\#a_1\#v_1\#\cdots\#u_k\#a_k\#v_k\#$$

  und eine Rechnung $K_0 \vdash \cdots \vdash K_t$ durch $code(K_0)\cdots code(K_t)$.
- Dann lassen sich die Wörter von A durch folgende Funktion $f : \tilde{\Gamma}^* \to \Sigma^*$ aufzählen (dabei ist x_0 ein beliebiges Wort in A):

  $$f(x) = \begin{cases} y, & x \text{ kodiert eine Rechnung } K_0 \vdash \cdots \vdash K_t \text{ von } M \\ & \text{mit } K_0 = K_y \text{ und } K_t \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Da f berechenbar ist, ist $A = img(f)$ rekursiv aufzählbar. $\square$

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von 6 $\Rightarrow$ 1: $\{L \mid L \text{ ist rek. aufzählbar}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$

- Sei $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $A = img(f)$ und sei M eine k-DTM, die f berechnet.
- Betrachte folgende $(k+1)$-DTM M', die bei Eingabe x
  - auf dem 2. Band der Reihe nach alle Wörter y in Γ^* erzeugt,
  - für jedes y den Wert $f(y)$ durch Simulation von $M(y)$ berechnet, und
  - ihre Eingabe x akzeptiert, sobald $f(y) = x$ ist. $\square$

Charakterisierung der entscheidbaren Sprachen

Satz

A ist genau dann entscheidbar, wenn A und $\bar{A}$ semi-entscheidbar sind, d.h. $\mathrm{REC} = \mathrm{RE} \cap \text{co-RE}$.

Beweis.

- Falls A entscheidbar ist, ist auch $\bar{A}$ entscheidbar, d.h. A und $\bar{A}$ sind dann auch semi-entscheidbar.
- Für die Rückrichtung seien $f_1, f_2 : \Gamma^* \to \Sigma^*$ Turing-berechenbare Funktionen mit $img(f_1) = A$ und $img(f_2) = \bar{A}$.
- Wir betrachten folgende DTM M, die bei Eingabe x
  - für jedes $y \in \Gamma^*$ die beiden Werte $f_1(y)$ und $f_2(y)$ bestimmt,
  - x akzeptiert, sobald ein y auf den Wert $f_1(y) = x$ führt und
  - x verwirft, sobald ein y auf den Wert $f_2(y) = x$ führt.
- Da jede Eingabe x entweder in $img(f_1) = A$ oder in $img(f_2) = \bar{A}$ enthalten ist, entscheidet M alle Eingaben. □

Kodierung (Gödelisierung) von Turingmaschinen

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine 1-DTM mit
  - Zustandsmenge $Z = \{q_0, \ldots, q_m\}$ (o.B.d.A. sei $E = \{q_m\}$),
  - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ und
  - Arbeitsalphabet $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_l\}$, wobei wir o.B.d.A. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \#$, $a_3 = \sqcup$ annehmen.
- Dann können wir jede Anweisung der Form $q_i a_j \to q_{i'} a_{j'} D$ durch das Wort

  $$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#b_D\#$$

  kodieren.
- Dabei ist $bin(n)$ die Binärdarstellung von n und

$$b_D = \begin{cases} 0, & D = N, \\ 1, & D = L, \\ 10, & D = R. \end{cases}$$

Kodierung von Turingmaschinen

- M lässt sich nun als ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$ kodieren, indem wir die Anweisungen von M in kodierter Form auflisten.
- Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 11$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung w_M von M.
- Die Binärzahl w_M wird auch die Gödel-Nummer von M genannt.
- M_w ist durch Angabe von w bis auf die Benennung ihrer Zustände und Arbeitszeichen eindeutig bestimmt.
- Ganz analog lassen sich auch DTMs mit einer beliebigen Anzahl von Bändern (sowie NTMs, Konfigurationen oder Rechnungen von TMs) kodieren.
- Umgekehrt können wir jedem Binärstring $w \in \{0, 1\}^*$ eine DTM M_w wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls eine DTM } M \text{ mit } w_M = w \text{ existiert,} \\ M_0, & \text{sonst (dabei sei } M_0 \text{ eine beliebige DTM).} \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Definition

- Das Halteproblem ist die Sprache

$$H = \left\{ w\#x \;\middle|\; \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und} \\ \text{die DTM } M_w \text{ hält} \\ \text{bei Eingabe } x \end{array} \right\}$$

- Das spezielle Halteproblem ist

$$K = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } w \end{array} \right\}$$

χ_H	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
w_1	0	1	0	$\cdots$
w_2	0	1	1	$\cdots$
w_3	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_K				
w_1	**0**			
w_2		**1**		
w_3			**0**	
$\vdots$				$\ddots$

Satz

$K \in \mathrm{RE} \setminus \mathrm{REC}$.

Semi-Entscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis von $K \in \text{RE}$

- Sei w_0 die Kodierung einer DTM, die bei jeder Eingabe (sofort) hält und betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \text{ ist Kodierung einer haltenden Rechnung einer} \\ & \text{DTM } M_w \text{ bei Eingabe } w, \\ w_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Da f berechenbar und $img(f) = K$ ist, folgt $K \in \text{RE}$. □

Bemerkung

Ganz ähnlich lässt sich $H \in \text{RE}$ zeigen.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis von $K \notin \text{REC}$

- Angenommen, die Sprache

$$K = \{w \mid M_w(w) \text{ hält}\} \qquad (*)$$

wäre durch eine DTM M_K entscheidbar.

- Betrachte die DTM $\hat{M}$, die bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ die DTM $M_K(w)$ simuliert und genau dann hält, wenn $M_K(w)$ verwirft:

$$\hat{M}(w) \text{ hält} \Leftrightarrow w \notin K \qquad (**)$$

- Für die Kodierung $\hat{w}$ von $\hat{M}$ folgt dann aber

$$\hat{w} \in K \overset{(*)}{\Leftrightarrow} M_{\hat{w}}(\hat{w}) \text{ hält} \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \hat{w} \notin K \; \lightning \text{ (Widerspruch!)}$$

□

χ_H	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
w_1	**0**	1	0	$\ldots$
w_2	0	**1**	1	$\ldots$
w_3	1	1	**0**	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\hat{w}$	**1**	**0**	**1**	$\cdots$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Korollar

- REC $\subsetneq$ RE,
- $K \in \text{RE} \setminus \text{co-RE}$ (d.h. RE $\neq$ co-RE),
- $\bar{K} \in \text{co-RE} \setminus \text{RE}$.

Beweis

- REC $\subsetneq$ RE: klar, da $K \in \text{RE} - \text{REC}$.
- $K \notin \text{co-RE}$: Aus der Annahme $K \in \text{co-RE}$ würde wegen $K \in \text{RE}$ folgen, dass K entscheidbar ist (Widerspruch).
- $\bar{K} \in \text{co-RE} \setminus \text{RE}$: klar, da $K \in \text{RE} \setminus \text{co-RE}$. □

Der Reduktionsbegriff

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt auf $B \subseteq \Gamma^*$ reduzierbar (kurz: $A \leq B$), falls eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ex., so dass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Beispiel

Es gilt $K \leq H$ mittels $f : w \mapsto w\#w$, da für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in K &\Leftrightarrow M_w \text{ ist eine DTM, die bei Eingabe } w \text{ hält} \\ &\Leftrightarrow w\#w \in H. \end{aligned}$$

◁

Abschluss von REC unter $\leq$

Definition

- Eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ heißt unter $\leq$ abgeschlossen, wenn für alle Sprachen A, B gilt:

$$A \leq B \wedge B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

Satz

Die Klassen REC und RE sind unter $\leq$ abgeschlossen.

Beweis

- Gelte $A \leq B$ mittels f und sei $B \in$ REC.
- Dann ex. eine DTM M, die χ_B berechnet.
- Betrachte folgende DTM M':
  - M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
  - simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.

Abschluss von REC und RE unter $\leq$

Satz

Die Klasse REC ist unter $\leq$ abgeschlossen.

Beweis.

- Gelte $A \leq B$ mittels f und sei $B \in \text{REC}$.
- Dann ex. eine DTM M, die χ_B berechnet.
- Betrachte folgende DTM M':
  - M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
  - simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.
- Wegen $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ ist $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$ und daher folgt

$$M'(x) = M(f(x)) = \chi_B(f(x)) = \chi_A(x).$$

- Also berechnet M' die Funktion χ_A, d.h. $A \in \text{REC}$. □

Bemerkung

Der Abschluss von RE unter $\leq$ folgt analog (siehe Übungen).

Der Vollständigkeitsbegriff

Definition

- Eine Sprache A heißt hart für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: $\mathcal{C}$-hart oder $\mathcal{C}$-schwer), falls jede Sprache $L \in \mathcal{C}$ auf A reduzierbar ist:

$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq A.$$

- Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache A, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt $\mathcal{C}$-vollständig.

Beispiel

Das Halteproblem H ist RE-vollständig. Es gilt nämlich

- $H \in \mathrm{RE}$ und
- $\forall L \in \mathrm{RE} : L \leq H$

mittels der Reduktionsfunktion $x \mapsto w\#x$, wobei w die Kodierung einer DTM M_w ist, die $\hat{\chi}_L$ berechnet. ◁

Bemerkung

Auch das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig (siehe Übungen).

H ist nicht entscheidbar

Korollar

- $A \leq B \wedge A \notin \text{REC} \Rightarrow B \notin \text{REC}$.
- $A \leq B \wedge A \notin \text{RE} \Rightarrow B \notin \text{RE}$.

Beweis

Aus der Annahme, dass B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, folgt wegen $A \leq B$, dass dies auch auf A zutrifft (Widerspruch). □

Bemerkung

Wegen $K \leq H$ überträgt sich somit die Unentscheidbarkeit von K auf H.

Korollar

$H \notin \text{REC}$.

Das Halteproblem bei leerem Band

Definition

Das Halteproblem bei leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } \varepsilon\end{array} \right\}$$

Satz

H_0 ist RE-vollständig.

Beweis

- $H_0 \in \mathrm{RE}$ folgt wegen $H_0 \leq H \in \mathrm{RE}$ mittels der Reduktionsfunktion $w \mapsto w\#\varepsilon$.

χ_H	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
w_1	0	1	0	$\cdots$
w_2	0	1	1	$\cdots$
w_3	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_K	
w_1	**0**
w_2	**1**
w_3	**0**
$\vdots$	$\ddots$

χ_{H_0}	
w_1	**0**
w_2	**0**
w_3	**1**
$\vdots$	$\vdots$

H ist auf H_0 reduzierbar

Beweis

- $H_0 \in \mathrm{RE}$ folgt wegen $H_0 \leq H \in \mathrm{RE}$ mittels der Reduktionsfunktion $w \mapsto w\#\varepsilon$.
- Sei $A \in \mathrm{RE}$ und sei w die Kodierung einer DTM, die $\hat{\chi}_A$ berechnet. Um A auf H_0 zu reduzieren, transformieren wir $x \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung einer DTM M_{w_x}, die zunächst ihre Eingabe durch x ersetzt und dann $M_w(x)$ simuliert. Dann gilt

$$x \in A \iff w_x \in H_0$$

und somit $A \leq H_0$ mittels der Reduktionsfunktion $x \mapsto w_x$.

Korollar

$H_0 \notin \mathrm{REC}$.

Der Satz von Rice

Frage

- Kann man einer beliebig vorgegebenen DTM ansehen, ob die von ihr berechnete Funktion eine gewisse Eigenschaft hat?
- Kann man beispielsweise entscheiden, ob eine gegebene DTM eine totale Funktion berechnet?

Antwort

Nein (es sei denn, die fragliche Eigenschaft ist trivial, d.h. keine oder jede DTM berechnet eine Funktion mit dieser Eigenschaft).

Der Satz von Rice

Definition

- Eine Eigenschaft $\mathcal{F}$ von Funktionen heißt trivial, wenn $\mathcal{F}$ entweder alle oder keine partielle berechenbare Funktionen auf $\{0,1,\#\}^*$ enthält.
- Zu $\mathcal{F}$ definieren wir die Sprache

$$L_{\mathcal{F}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{die DTM } M_w \text{ berechnet eine Funktion in } \mathcal{F} \right\}.$$

$\mathcal{F}$ ist also nicht trivial, wenn $L_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ und $L_{\mathcal{F}} \neq \{0,1\}^*$ ist.
Der Satz von Rice besagt, dass $L_{\mathcal{F}}$ in diesem Fall unentscheidbar ist.

Satz (Satz von Rice)

Für jede nicht triviale Eigenschaft $\mathcal{F}$ ist $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar.

Der Satz von Rice

Beispiel

- Die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}$$

  ist unentscheidbar.
- Dies folgt aus dem Satz von Rice, da $L = L_{\mathcal{F}}$ für folgende nichttriviale Eigenschaft ist:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{FREC}_p \mid f(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

- Es gibt nämlich partielle berechenbare Funktionen auf $\{0,1,\#\}^*$ mit dieser Eigenschaft wie z.B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0^{n+1}, & x = 0^n \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

  als auch ohne diese Eigenschaft (wie die konstante Funktion $g(x) = 0$).

Der Satz von Rice

Satz (Satz von Rice)

Für jede nicht triviale Eigenschaft $\mathcal{F}$ ist die Sprache $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar.

Beweis

- Die Idee besteht darin, H_0 auf $L_{\mathcal{F}}$ zu reduzieren, indem wir für eine gegebene DTM M_w eine DTM $M_{w'}$ konstruieren mit

  $$w \in H_0 \Leftrightarrow M_{w'} \text{ berechnet eine Funktion in } \mathcal{F}.$$

- Hierzu lassen wir $M_{w'}$ bei Eingabe x zunächst einmal die DTM M_w bei Eingabe ε simulieren.
- Falls $w \notin H_0$ ist, berechnet $M_{w'}$ also die überall undefinierte Funktion u mit $u(x) = \uparrow$ für alle $x \in \{0, 1, \#\}^*$.
- Für das Folgende nehmen wir an, dass $u \notin \mathcal{F}$ ist. Andernfalls zeigen wir für die komplementäre Eigenschaft $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{F}}$, dass $L_{\mathcal{F}'}$ unentscheidbar ist. Dies impliziert, dass auch $\overline{L}_{\mathcal{F}'} = \overline{L}_{\overline{\mathcal{F}}} = L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar ist.
- Damit die Reduktion gelingt, müssen wir also nur dafür sorgen, dass $M_{w'}$ im Fall $w \in H_0$ eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ berechnet.

Der Satz von Rice

Beweis (Schluss)

- Damit die Reduktion gelingt, müssen wir also nur dafür sorgen, dass $M_{w'}$ im Fall $w \in H_0$ eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ berechnet.
- Da $\mathcal{F}$ nicht trivial ist, gibt es eine DTM M, die eine partielle Funktion $f \in \mathcal{F}$ berechnet.
- Betrachte die Reduktionsfunktion

  $h(w) = w'$, wobei w' die Kodierung einer DTM ist, die bei Eingabe x zunächst die DTM $M_w(\varepsilon)$ simuliert und im Fall, dass $M_w(\varepsilon)$ hält, mit der Simulation von $M(x)$ fortfährt.
- Dann ist $h : w \mapsto w'$ eine totale berechenbare Funktion und es gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } f &&\Rightarrow w' \in L_{\mathcal{F}}, \\ w \notin H_0 &\Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } u &&\Rightarrow w' \notin L_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

- Dies zeigt, dass h das Problem H_0 auf $L_{\mathcal{F}}$ reduziert, und da H_0 unentscheidbar ist, muss auch $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar sein. □

Berechen- und Entscheidbarkeit

Wir fassen die (semi-) entscheidbaren Sprachen und die (partiellen) berechenbaren Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{RE} &= \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\},\\
\mathsf{REC} &= \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die jede Eingabe entscheidet}\},\\
\mathsf{FREC} &= \{f \mid f \text{ ist eine (totale) berechenbare Funktion}\},\\
\mathsf{FREC}_p &= \{f \mid f \text{ ist eine partielle berechenbare Funktion}\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

- $\mathsf{FREC} \subsetneq \mathsf{FREC}_p$ und
- $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{DCFL} \subsetneq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{REC} \subsetneq \mathsf{RE}$.

Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Definition

- Sei Σ ein beliebiges Alphabet mit $\# \notin \Sigma$.
- Das Postsche Korrespondenzproblem über Σ (kurz PCP_Σ) ist:

  gegeben: k Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ von Wörtern über Σ.

  gefragt: Gibt es eine Folge $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$, $n \geq 1$, von Indizes $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$?
- Das modifizierte PCP über Σ (kurz MPCP_Σ) fragt nach einer Lösung $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_1 = 1$.
- Wir notieren eine PCP-Instanz meist in Form einer Matrix $\binom{x_1 \cdots x_k}{y_1 \ldots y_k}$ und kodieren sie durch das Wort $x_1 \# y_1 \# \cdots \# x_k \# y_k$.

Beispiel

Die Instanz $I = \binom{x_1\ x_2\ x_3}{y_1\ y_2\ y_3} = \binom{a\ \ ab\ caa}{aca\ bc\ aa}$ besitzt wegen

$x_1 x_3 x_2 x_3 = acaaabcaa$

$y_1 y_3 y_2 y_3 = acaaabcaa$

die PCP-Lösung $\alpha = (1, 3, 2, 3)$, die auch eine MPCP-Lösung ist. $\triangleleft$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Lemma

Für jedes Alphabet Σ gilt $\mathrm{PCP}_\Sigma \leq \mathrm{PCP}_{\{a,b\}}$.

Beweis

- Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Für ein Zeichen $a_i \in \Sigma$ sei $\hat{a}_i = ab^{i-1}$ und für ein Wort $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_i \in \Sigma$ sei $\hat{w} = \hat{w}_1 \cdots \hat{w}_n$.
- Dann folgt $\mathrm{PCP}_\Sigma \leq \mathrm{PCP}_{\{a,b\}}$ mittels der Reduktionsfunktion

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \ldots y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k \\ \hat{y}_1 \ldots \hat{y}_k \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Dann ist $\hat{0} = a$, $\hat{1} = ab$ und $\hat{2} = abb$. Somit ist

$$f\begin{pmatrix} 0 & 01 & 200 \\ 020 & 12 & 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aab & abbaa \\ aabba & ababb & aa \end{pmatrix}.$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Im Folgenden lassen wir im Fall $\Sigma = \{a, b\}$ den Index weg und schreiben einfach PCP (bzw. MPCP).

Satz

$\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}$.

Beweis

- Wir zeigen $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b, \langle, |, \rangle\}$.
- Für ein Wort $w = w_1 \cdots w_n$ sei

$\overleftarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overrightarrow{w}$
$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$	$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n$	$\vert w_1 \vert \cdots \vert w_n$	$w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beweis von $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}$

- Wir zeigen $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b, \langle, |, \rangle\}$.
- Für ein Wort $w = w_1 \cdots w_n$ sei

$\overleftarrow{w}$	$\overrightarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overrightarrow{w}$
$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$	$w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$	$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n$	$\vert w_1 \vert \cdots \vert w_n$

- Wir reduzieren MPCP mittels folgender Funktion f auf PCP_Σ:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1} & \cdots & \overrightarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overrightarrow{y_1} & \cdots & \overrightarrow{y_k} & \vert\rangle \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$f : \begin{pmatrix} aa & b & bab & bb \\ aab & bb & a & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle a\vert a\vert & a\vert a\vert & b\vert & b\vert a\vert b\vert & b\vert b\vert & \rangle \\ \langle a\vert a\vert b & \vert a\vert a\vert b & \vert b\vert b & \vert a & \vert b & \vert\rangle \end{pmatrix}$$

◁

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beweis von $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}$

- Wir zeigen $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b, \langle, |, \rangle\}$.
- Für ein Wort $w = w_1 \cdots w_n$ sei

$\overleftarrow{w}$	$\overrightarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overleftrightarrow{w}$
$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$	$w_1 \vert \cdots \vert w_n \vert$	$\langle w_1 \vert \cdots \vert w_n$	$\vert w_1 \vert \cdots \vert w_n$

- Wir reduzieren MPCP mittels folgender Funktion f auf PCP_Σ:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1} & \cdots \overrightarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftrightarrow{y_1} & \cdots \overleftrightarrow{y_k} & \vert\rangle \end{pmatrix}$$

- Da jede MPCP-Lösung $\alpha = (1, i_2, \ldots, i_n)$ für I auf eine PCP-Lösung $\alpha' = (1, i_2 + 1, \ldots, i_n + 1, k + 2)$ für $f(I)$ führt, folgt

$$I \in \mathrm{MPCP} \Rightarrow f(I) \in \mathrm{PCP}_\Sigma.$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beweis von $\mathrm{MPCP} \leq \mathrm{PCP}$

- Für die umgekehrte Implikation sei $\alpha' = (i_1, \ldots, i_n)$ eine PCP-Lösung für

$$f(I) = \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1} & \cdots & \overrightarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overrightarrow{y_1} & \cdots & \overrightarrow{y_k} & |\rangle \end{pmatrix}.$$

- Dann muss $i_1 = 1$ sein, da $(\overleftarrow{x_1}, \overleftarrow{y_1})$ das einzige Paar in $f(I)$ ist, bei dem beide Komponenten mit demselben Buchstaben anfangen.
- Zudem muss $i_n = k + 2$ sein, da nur das Paar $(\rangle, |\rangle)$ mit demselben Buchstaben aufhört.
- Wählen wir α' von minimaler Länge, so ist $i_j \in \{2, \ldots, k+1\}$ für $j = 2, \ldots, n-1$.
- Dann ist aber

$$\alpha = (i_1, i_2 - 1, \ldots, i_{n-1} - 1)$$

eine MPCP-Lösung für I. □

Das Postsche Korrespondenzproblem

Satz

PCP ist RE-vollständig und damit unentscheidbar.

Beweis.

- Es ist leicht zu sehen, dass $\mathrm{PCP} \in \mathrm{RE}$ ist.
- Sei $A \in \mathrm{RE}$ und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, E)$ eine 1-DTM für A.
- Wir zeigen $A \leq \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$ für $\Sigma' = \Gamma \cup Z \cup \{\langle, |, \rangle\}$.
- Wegen $\mathrm{MPCP}_{\Sigma'} \leq \mathrm{PCP}$ folgt hieraus $A \leq \mathrm{PCP}$.

Beweisidee für die Reduktion $A \leq \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$:

Transformiere eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ in eine Instanz $f(w) = \binom{x_1 \cdots x_k}{y_1 \ldots y_k}$, so dass $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ genau dann eine MPCP-Lösung für $f(w)$ ist, wenn das zugehörige Lösungswort $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$ eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ kodiert. Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(w) \in \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}.$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beweis von $A \leq \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$

Wir bilden $f(w)$ aus folgenden Wortpaaren:

1. $(\langle, \langle \mid z_0 w)$, „Startregel“
2. für alle $a \in \Gamma \cup \{|\}$: (a, a), „Kopierregeln“
3. für alle $a, a', b \in \Gamma$, $z, z' \in Z$:

   $(za, z'a')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', N)$,
   $(za, a'z')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', R)$,
   $(bza, z'ba')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', L)$,
   $(\mid za, \mid z' \sqcup a')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', L)$, „Überführungsregeln“
   $(bz \mid, z'ba' \mid)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', L)$,
   $(z \mid, z'a' \mid)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', N)$,
   $(z \mid, a'z' \mid)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', R)$,

4. für alle $e \in E$, $a \in \Gamma$: (ae, e), (ea, e), „Löschregeln“
5. sowie für alle $e \in E$: $(e \mid \rangle, \rangle)$. „Abschlussregeln“

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beispiel

- Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$ und den Anweisungen

$$\begin{array}{llllllll} \delta\colon & q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_1 B \to q_1 BR & (3) & q_1 b \to q_2 BL & (4) \\ & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_2 B \to q_2 BL & (6) & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_0 B \to q_3 BR & (8) \\ & q_3 B \to q_3 BR & (9) & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10) & & & & \end{array}$$

- M akzeptiert die Eingabe ab wie folgt:

$$q_0 ab \underset{(1)}{\vdash} Aq_1 b \underset{(4)}{\vdash} q_2 AB \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 B \underset{(8)}{\vdash} ABq_3 \sqcup \underset{(10)}{\vdash} ABq_4 \sqcup$$

- Die MPCP-Instanz $f(ab)$ enthält für $u \in \Gamma$ die Wortpaare

Startregel	Kopierregeln	Löschregeln	Abschlussregel
$(\langle, \langle \mid z_0 ab)$	(u, u), $(\mid, \mid)$	$(q_4 u, q_4), (uq_4, q_4)$	$(q_4 \mid \rangle, \rangle)$

sowie folgende Überführungsregeln:

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beispiel

- Die MPCP-Instanz $f(ab)$ enthält für $u \in \Gamma$ die Wortpaare

Startregel	Kopierregeln	Löschregeln	Abschlussregel
$(\langle, \langle \mid z_0 ab)$	$(u, u), (\mid, \mid)$	$(q_4 u, q_4), (u q_4, q_4)$	$(q_4 \mid \rangle, \rangle)$

sowie folgende Überführungsregeln:

Anweisung	zugehörige Überführungsregeln
$q_0 a \to q_1 A R \quad (1)$	$(q_0 a, A q_1)$
$q_1 a \to q_1 a R \quad (2)$	$(q_1 a, a q_1)$
$q_1 B \to q_1 B R \quad (3)$	$(q_1 B, B q_1)$
$q_1 b \to q_2 B L \quad (4)$	$(u q_1 b, q_2 u B), (\mid q_1 b, \mid q_2 \sqcup B)$
$q_2 a \to q_2 a L \quad (5)$	$(u q_2 a, q_2 u a), (\mid q_2 a, \mid q_2 \sqcup a)$
$q_2 B \to q_2 B L \quad (6)$	$(u q_2 B, q_2 u B), (\mid q_2 B, \mid q_2 \sqcup B)$
$q_2 A \to q_0 A R \quad (7)$	$(q_2 A, A q_0)$
$q_0 B \to q_3 B R \quad (8)$	$(q_0 B, B q_3)$
$q_3 B \to q_3 B R \quad (9)$	$(q_3 B, B q_3)$
$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N \quad (10)$	$(q_3 \sqcup, q_4 \sqcup), (q_3 \mid, q_4 \sqcup \mid)$

Beispiel

- Die MPCP-Instanz $f(ab)$ enthält für $u \in \Gamma$ die Wortpaare

Startregel	Kopierregeln	Löschregeln	Abschlussregel
$(\langle, \langle \mid z_0 ab)$	(u, u), $(\mid, \mid)$	$(q_4 u, q_4), (u q_4, q_4)$	$(q_4 \mid \rangle, \rangle)$

sowie u.a. folgende Überführungsregeln:

Anweisung	zugehörige Regeln
$q_0 a \to q_1 A R \quad (1)$	$(q_0 a, A q_1)$
$q_1 b \to q_2 B L \quad (4)$	$(u q_1 b, q_2 u B)$, $(\mid q_1 b, \mid q_2 \sqcup B)$
$q_2 A \to q_0 A R \quad (7)$	$(q_2 A, A q_0)$
$q_0 B \to q_3 B R \quad (8)$	$(q_0 B, B q_3)$
$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N \ (10)$	$(q_3 \sqcup, q_4 \sqcup)$, $(q_3 \mid, q_4 \sqcup \mid)$

- Der akzeptierenden Rechnung

$$q_0 ab \underset{(1)}{\vdash} A q_1 b \underset{(4)}{\vdash} q_2 AB \underset{(7)}{\vdash} A q_0 B \underset{(8)}{\vdash} AB q_3 \sqcup \underset{10}{\vdash} AB q_4 \sqcup$$

von $M(ab)$ entspricht dann das MPCP-Lösungswort

$$\langle \mid q_0 ab \mid A q_1 b \mid q_2 AB \mid A q_0 B \mid AB q_3 \mid AB q_4 \sqcup \mid A q_4 \sqcup \mid q_4 \sqcup \mid q_4 \mid \rangle$$
$$\langle \mid q_0 ab \mid A q_1 b \mid q_2 AB \mid A q_0 B \mid AB q_3 \mid AB q_4 \sqcup \mid A q_4 \sqcup \mid q_4 \sqcup \mid q_4 \mid \rangle$$

◁

Das Postsche Korrespondenzproblem

Beweis von $A \leq \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$

- Nun lässt sich leicht aus einer akzeptierenden Rechnung

  $$K_0 = z_0 w \vdash K_1 \vdash \cdots \vdash K_t = uev$$

  mit $e \in E$ und $u, v \in \Gamma^*$ eine MPCP-Lösung mit einem Lösungswort der Form

  $$\langle \mid K_0 \mid K_1 \mid \cdots \mid K_t \mid K_{t+1} \mid \cdots \mid K_{t+|K_t|-1} \mid \rangle$$

  angeben, wobei K_{t+i} aus K_t durch Löschen von i Zeichen in der Nachbarschaft von e entsteht.

- Umgekehrt lässt sich aus jeder MPCP-Lösung auch eine akzeptierende Rechnung von M bei Eingabe w gewinnen, womit

  $$w \in L(M) \Leftrightarrow f(w) \in \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$$

  gezeigt ist. □

Das Schnittproblem für CFL ist unentscheidbar

Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.

Gefragt: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$?

Satz

Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken ist RE-vollständig.

Beweis

- Es ist leicht zu sehen, dass das Problem semi-entscheidbar ist.
- Wir reduzieren eine PCP-Instanz $I = \binom{x_1 \cdots x_k}{y_1 \ldots y_k}$ auf ein Grammatikpaar (G_1, G_2), so dass gilt: $I \in \mathrm{PCP} \Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$.
- Für $i = 1, 2$ sei $G_i = (\{S\}, \{a, b, 1, \ldots, k\}, P_i, S)$ mit

  P_1: $S \to 1Sx_1, \ldots, kSx_k, 1x_1, \ldots, kx_k$,

  P_2: $S \to 1Sy_1, \ldots, kSy_k, 1y_1, \ldots, ky_k$.

Das Schnittproblem für CFL ist unentscheidbar

Beispiel

- Die PCP-Instanz

$$I = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aab & abbaa \\ aabba & ababb & aa \end{pmatrix}$$

wird auf das Grammatikpaar (G_1, G_2) mit folgenden Regeln reduziert:

$$\begin{aligned} P_1\colon S_1 &\to 1Sa,\ 2Saab,\ 3Sabbaa, \\ &\quad\ 1a,\ 2aab,\ 3abbaa, \\ P_2\colon S_2 &\to 1Saabba,\ 2Sababb,\ 3Saa, \\ &\quad\ 1aabba,\ 2ababb,\ 3aa. \end{aligned}$$

- Der PCP-Lösung $\alpha = (1, 3, 2, 3)$ entspricht dann das Wort

$$\begin{aligned} 3231x_1x_3x_2x_3 &= 3231aabbaaaababbaa \\ &= 3231aabbaaaababbaa = 3231y_1y_3y_2y_3 \end{aligned}$$

im Schnitt $L(G_1) \cap L(G_2)$. ◁

Das Schnittproblem für CFL ist unentscheidbar

Reduktion von PCP auf das Schnittproblem für CFL

- Für $i = 1, 2$ sei $G_i = (\{S\}, \{a, b, 1, \ldots, k\}, P_i, S)$ mit

  $$P_1\colon S \to 1Sx_1, \ldots, kSx_k, 1x_1, \ldots, kx_k,$$
  $$P_2\colon S \to 1Sy_1, \ldots, kSy_k, 1y_1, \ldots, ky_k.$$

- Dann gilt

  $$L(G_1) = \{i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid 1 \leq n,\ 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq k\},$$
  $$L(G_2) = \{i_n \cdots i_1 y_{i_1} \cdots y_{i_n} \mid 1 \leq n,\ 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq k\}.$$

- Somit ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ die Sprache

  $$\{i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid 1 \leq n,\ x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}\}.$$

- Folglich ist $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ genau dann eine Lösung für I, wenn $i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in L(G_1) \cap L(G_2)$ ist.

- Also vermittelt $f : I \mapsto (G_1, G_2)$ eine Reduktion von PCP auf das Schnittproblem für CFL. □

Das Schnitt- und das Inklusionsproblem für DCFL sind unentscheidbar

Korollar

1. Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig.
2. Das Inklusionsproblem für DPDAs ist co-RE-vollständig.

Beweis.

1. Die kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 in obigem Beweis lassen sich leicht in äquivalente DPDAs M_1 und M_2 verwandeln (siehe Übungen).
2. Wir reduzieren das Komplement des Schnittproblems für DPDAs auf das Inklusionsproblem für DPDAs. Wegen

   $$L_1 \cap L_2 = \emptyset \Leftrightarrow L_1 \subseteq \overline{L_2}.$$

   berechnet die Funktion $f : (M_1, M_2) \mapsto (M_1, \overline{M_2})$ die gewünschte Reduktion. $\square$

Weitere Unentscheidbarkeitsresultate für CFL

Korollar

Für kontextfreie Grammatiken sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. Ist $L(G) = \Sigma^*$? (Ausschöpfungsproblem)
2. Ist $L(G_1) = L(G_2)$? (Äquivalenzproblem)
3. Ist G mehrdeutig? (Mehrdeutigkeitsproblem)

1 Das Ausschöpfungsproblem für kf. Grammatiken ist co-RE-vollständig

Wir reduzieren das Komplement des Schnittproblems für DPDAs auf das Ausschöpfungsproblem für kontextfreie Grammatiken. Es gilt

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \Leftrightarrow \overline{L_1} \cup \overline{L_2} = \Sigma^*.$$

Daher vermittelt die Funktion $f : (M_1, M_2) \mapsto G$, wobei G eine kontextfreie Grammatik mit

$$L(G) = \overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}$$

ist, die gewünschte Reduktion. □

Weitere Unentscheidbarkeitsresultate für CFL

Korollar

Für kontextfreie Grammatiken sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. Ist $L(G) = \Sigma^*$? (Ausschöpfungsproblem)
2. Ist $L(G_1) = L(G_2)$? (Äquivalenzproblem)
3. Ist G mehrdeutig? (Mehrdeutigkeitsproblem)

2 Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken ist co-RE-vollständig

Wir reduzieren das Ausschöpfungsproblem für CFL auf das Äquivalenzproblem für CFL.

Dies leistet beispielsweise die Reduktionsfunktion

$$f : G \mapsto (G, G_{all}),$$

wobei G_{all} eine kontextfreie Grammatik mit $L(G_{all}) = \Sigma^*$ ist. □

Weitere Unentscheidbarkeitsresultate für CFL

3 Das Mehrdeutigkeitsproblem ist RE-vollständig

- Wir reduzieren PCP auf das Mehrdeutigkeitsproblem.
- Betrachte die Reduktionsfunktion $f : \binom{x_1 \cdots x_k}{y_1 \ldots y_k} \mapsto G$ mit

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, 1, \ldots, k\}, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to A, S \to B\}, S)$$

und den Regeln

$$P_1\colon A \to 1Ax_1, \ldots, kAx_k, 1x_1, \ldots, kx_k,$$

$$P_2\colon B \to 1By_1, \ldots, kBy_k, 1y_1, \ldots, ky_k.$$

- Da alle von A oder B ausgehenden Ableitungen eindeutig sind, ist G genau dann mehrdeutig, wenn es ein Wort $w \in L(G)$ gibt mit

$$S \Rightarrow A \Rightarrow^* w \quad \text{und} \quad S \Rightarrow B \Rightarrow^* w.$$

- Wie wir im Beweis der Unentscheidbarkeit des Schnittproblems für CFL gesehen haben, ist dies genau dann der Fall, wenn die PCP-Instanz $I = \binom{x_1 \cdots x_k}{y_1 \ldots y_k}$ eine PCP-Lösung hat. □

Ein Unentscheidbarkeitsresultat für DCSL

Das Leerheitsproblem für DLBAs

Gegeben: Ein DLBA M.

Gefragt: Ist $L(M) = \emptyset$?

Satz

Das Leerheitsproblem für DLBAs ist co-RE-vollständig.

Beweis.

- Wir reduzieren das Ausschöpfungsproblem für CFL auf das Leerheitsproblem für DLBAs.
- Eine kontextfreie Grammatik G lässt sich wie folgt in einen DLBA M mit $L(M) = \overline{L(G)}$ überführen (siehe Übungen):
  - Bestimme zunächst einen DLBA M mit $L(M) = L(G)$.
  - Konstruiere daraus einen DLBA $\overline{M}$ mit $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$.
- Dann gilt $L(G) = \Sigma^* \Leftrightarrow L(M) = \emptyset$, d.h. die Funktion $f : G \mapsto \overline{M}$ berechnet die gewünschte Reduktion. □

Entscheidbare Probleme

Dagegen ist es nicht schwer,

- für eine kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob mindestens ein Wort in G ableitbar ist (Leerheitsproblem für CFL), und
- für eine kontextsensitive Grammatik G und ein Wort x zu entscheiden, ob x in G ableitbar ist (Wortproblem für CSL).

Satz

- Das Leerheitsproblem für CFL ist entscheidbar.
- Das Wortproblem für CSL ist entscheidbar.

Beweis.

Siehe Übungen. □

Überblick der gezeigten (Un-)Entscheidbarkeitsresultate

In folgender Tabelle fassen wir nochmals zusammen, wie schwierig die betrachteten Entscheidungsprobleme für die verschiedenen Stufen der Chomsky-Hierarchie sind.

	Wort-problem $x \in L$?	Leerheits-problem $L = \emptyset$?	Aus-schöpfung $L = \Sigma^*$?	Äquivalenz-problem $L_1 = L_2$?	Inklusions-problem $L_1 \subseteq L_2$	Schnitt-problem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$?
REG	ja	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	ja	ja	ja	ja[a]	nein	nein
CFL	ja	ja	nein	nein	nein	nein
DCSL	ja	nein	nein	nein	nein	nein
CSL	ja	nein	nein	nein	nein	nein
RE	nein	nein	nein	nein	nein	nein

[a] Bewiesen in 1997 von Géraud Sénizergues (Univ. Bordeaux).

Die arithmetische Hierarchie

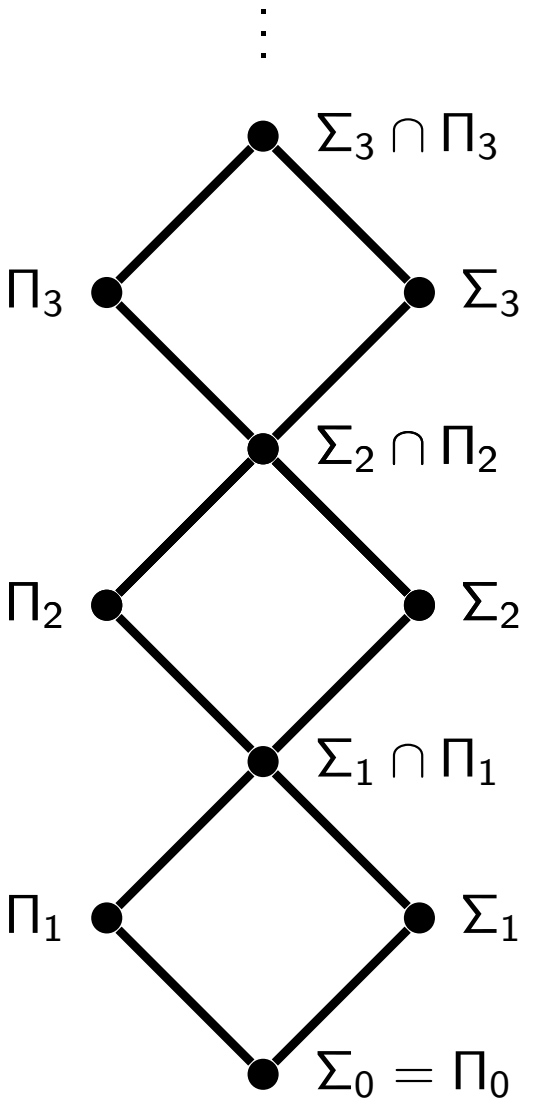
Frage

Lässt sich der Grad der Unentscheidbarkeit von unentscheidbaren Problemen irgendwie messen?

Definition

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $\mathcal{K}$ eine Sprachklasse. Dann ist

- $\exists A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \{0,1\}^* : x\#y \in A\}$ und
- $\exists \mathcal{K} = \mathcal{K} \cup \{\exists A \mid A \in \mathcal{K}\}$.
- Weiter sei $\Sigma_0 = \Pi_0 = \text{REC}$ und $\Sigma_i = \exists \Pi_{i-1}$ sowie $\Pi_i = \text{co-}\Sigma_i$ für $i \geq 1$.
- Die Sprachklassen Σ_i, Π_i, $i \geq 0$, bilden die Stufen der arithmetischen Hierarchie.



Die arithmetische Hierarchie

Proposition

- $\mathrm{RE} = \Sigma_1$.
- $\Sigma_i \cup \Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1}$ für $i \geq 0$.

Beweis von $\mathrm{RE} = \Sigma_1$

- Die Inklusion $\exists\mathrm{REC} \subseteq \mathrm{RE}$ ist klar, da eine DTM im Fall $B \in \mathrm{REC}$ die Sprache $A = \exists B$ akzeptiert, indem sie bei Eingabe x systematisch nach einem String y mit $x\#y \in B$ sucht.
- Für den Beweis von $\mathrm{RE} \subseteq \exists\mathrm{REC}$ sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache in RE und M sei eine DTM mit $L(M) = A$. Dann gilt $A = \exists B$ für die Sprache

$$B = \{x\#y \mid x \in \Sigma^* \text{ und } y \text{ kodiert eine akz. Rechnung von } M(x)\}.$$

Da B offensichtlich entscheidbar ist, folgt $A \in \exists\mathrm{REC}$. □

Die arithmetische Hierarchie

Beweis von $\Sigma_i \cup \Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1}$

- Die Inklusion $\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ ist klar, da $\Pi_i \subseteq \exists\Pi_i = \Sigma_{i+1}$ ist.
- Wegen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \Leftrightarrow \text{co-}\mathcal{K} \subseteq \text{co-}\mathcal{K}'$ und $\Sigma_j = \text{co-}\Pi_j$ für $j \geq 0$ folgt hieraus auch $\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$.
- Die Inklusionen $\Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma_i$ lassen sich induktiv wie folgt zeigen.
  - $i = 1$: $\Sigma_0 = \text{REC} \subseteq \text{RE} = \Sigma_1$.
  - $i \rightsquigarrow i + 1$: Nach IV gilt $\Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma_i$. Folglich ist $\Pi_{i-1} \subseteq \Pi_i$, was wegen der Monotonie des $\exists$-Operators (d.h. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \Rightarrow \exists\mathcal{K} \subseteq \exists\mathcal{K}'$) wiederum $\Sigma_i = \exists\Pi_{i-1} \subseteq \exists\Pi_i = \Sigma_{i+1}$ impliziert.
- Durch Übergang zu den co-Klassen erhalten wir auch $\Pi_{i-1} \subseteq \Pi_i$. □

Mittels Diagonalisierung kann man zeigen, dass die Inklusionen $\Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma_i$ echt sind, und dass $\Sigma_i \neq \Pi_i$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Überblick der gezeigten (Un-)Entscheidbarkeitsresultate

Die betrachteten Entscheidungsprobleme für die verschiedenen Stufen der Chomsky-Hierarchie lassen sich nun wie folgt in die arithmetische Hierarchie einordnen.

Stufe	Wort-problem $x \in L$?	Leerheits-problem $L = \emptyset$?	Aus-schöpfung $L = \Sigma^*$?	Äquivalenz-problem $L_1 = L_2$?	Inklusions-problem $L_1 \subseteq L_2$	Schnitt-problem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$?
REG	REC	REC	REC	REC	REC	REC
DCFL	REC	REC	REC	REC	co-RE	RE
CFL	REC	REC	co-RE	co-RE	co-RE	RE
DCSL	REC	co-RE	co-RE	co-RE	co-RE	RE
CSL	REC	co-RE	co-RE	co-RE	co-RE	RE
RE	RE	co-RE	Π_2	Π_2	Π_2	RE

Tatsächlich sind alle betrachteten Entscheidungsprobleme sogar vollständig für die angegebenen Sprachklassen.

Zeitkomplexität von Turingmaschinen

Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt.

Definition

- Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist definiert als

  $$time_M(x) = \max\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

  wobei $\max \mathbb{N} = \infty$ ist.
- Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.
- Dann ist M $t(n)$-zeitbeschränkt, falls für alle Eingaben x gilt:

  $$\mathrm{time}_M(x) \leq t(|x|).$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität).

Zeitkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden Komplexitätsklassen zusammen.

Definition

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}.$$

- Die in nichtdeterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}.$$

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse

$$\mathrm{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte} \\ \text{DTM } M, \text{ die } f \text{ berechnet} \end{array} \right\}.$$

Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\mathsf{LINTIME} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(cn + c) \qquad \text{„Linearzeit“}$$

$$\mathsf{P} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(n^c + c) \qquad \text{„Polynomialzeit“}$$

$$\mathsf{E} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{cn+c}) \qquad \text{„Lineare Exponentialzeit“}$$

$$\mathsf{EXP} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) \qquad \text{„Exponentialzeit“}$$

- Die nichtdeterministischen Klassen NLINTIME, NP, NE, NEXP und die Funktionenklassen FP, FE, FEXP sind analog definiert.
- Für eine Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen sei $\mathsf{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t \in \mathcal{F}} \mathsf{DTIME}(t(n))$ (die Klassen $\mathsf{NTIME}(\mathcal{F})$ und $\mathsf{FTIME}(\mathcal{F})$ seien analog definiert).

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$.

- Wir schreiben $f(n) = O(g(n))$, falls es Zahlen n_0 und c gibt mit

  $$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

  Bedeutung: „f wächst nicht wesentlich schneller als g."

- Formal bezeichnet der Term $O(g(n))$ die Klasse aller Funktionen f, die obige Bedingung erfüllen.
- Die Gleichung $f(n) = O(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine Element-Beziehung $f \in O(g(n))$ aus.
- O-Terme können auch auf der linken Seite vorkommen.
- In diesem Fall wird eine Inklusionsbeziehung ausgedrückt.
- So steht $n^2 + O(n) = O(n^2)$ für die Aussage

  $$\{n^2 + f \mid f \in O(n)\} \subseteq O(n^2).$$

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Beispiel

- $7\log(n) + n^3 = O(n^3)$ ist richtig.
- $7\log(n)n^3 = O(n^3)$ ist falsch.
- $2^{n+O(1)} = O(2^n)$ ist richtig.
- $2^{O(n)} = O(2^n)$ ist falsch (siehe Übungen).

Mit der O-Notation lassen sich die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} \text{LINTIME} &= \text{DTIME}(O(n)) && \text{„Linearzeit“} \\ \text{P} &= \text{DTIME}(n^{O(1)}) && \text{„Polynomialzeit“} \\ \text{E} &= \text{DTIME}(2^{O(n)}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“} \\ \text{EXP} &= \text{DTIME}(2^{n^{O(1)}}) && \text{„Exponentialzeit“} \end{aligned}$$

Platzkomplexität von Turingmaschinen

- Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch von NTMs.
- Intuitiv ist dies die Anzahl aller während einer Rechnung benutzten Bandfelder.
- Wollen wir auch sublinearen Platz sinnvoll definieren, so dürfen wir hierbei das Eingabeband offensichtlich nicht berücksichtigen.
- Um sicherzustellen, dass eine NTM M das Eingabeband nicht als Speicher benutzt, verlangen wir, dass
  - M die Felder auf dem Eingabeband nicht verändert und
  - sich nicht mehr als ein Feld von der Eingabe entfernt.

Definition

Eine NTM M heißt offline-NTM (oder NTM mit Eingabeband), falls für jede von M bei Eingabe x erreichbare Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$$

gilt, dass $u_1 a_1 v_1$ ein Teilwort von $\sqcup x \sqcup$ ist.

Platzkomplexität von Turingmaschinen

Definition

- Der Platzverbrauch einer offline-NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$space_M(x) = \max \left\{ s \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \\ \text{mit } K_x \vdash^* K \text{ und } s = \sum_{i=2}^{k} |u_i a_i v_i| \end{array} \right\}.$$

- Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.
- M heißt $s(n)$-platzbeschränkt, falls für alle Eingaben x gilt:

  $space_M(x) \leq s(|x|)$.

Platzkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen, die in einer vorgegebenen Platzschranke $s(n)$ entscheidbar sind, in folgenden Platzkomplexitätsklassen zusammen.

Definition

- Die auf deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\text{DSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-DTM}\}.$$

- Die auf nichtdeterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\text{NSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-NTM}\}.$$

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Platzkomplexitätsklassen sind

$$\mathsf{L} = \mathrm{DSPACE}(O(\log n)) \qquad \text{„Logarithmischer Platz“}$$

$$\mathsf{LINSPACE} = \mathrm{DSPACE}(O(n)) \qquad \text{„Linearer Platz“}$$

$$\mathsf{PSPACE} = \mathrm{DSPACE}(n^{O(1)}) \qquad \text{„Polynomieller Platz“}$$

- Die nichtdeterministischen Klassen NL, NLINSPACE und NPSPACE sind analog definiert.
- Der Satz von Savitch besagt, dass

$$\mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(s^2(n))$$

ist (dies wird in der VL Komplexitätstheorie gezeigt).

Daher fallen die Klassen NPSPACE und PSPACE zusammen.

Die wichtigsten Zeit- und Platzkomplexitätsklassen

Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen sind

LINTIME	$= \mathrm{DTIME}(O(n))$	„Linearzeit“
P	$= \mathrm{DTIME}(n^{O(1)})$	„Polynomialzeit“
NP	$= \mathrm{NTIME}(n^{O(1)})$	„Nichtdet. Polynomialzeit“
E	$= \mathrm{DTIME}(2^{O(n)})$	„Lineare Exponentialzeit“
EXP	$= \mathrm{DTIME}(2^{n^{O(1)}})$	„Exponentialzeit“

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen sind

L	$= \mathrm{DSPACE}(O(\log n))$	„Logarithmischer Platz“
NL	$= \mathrm{NSPACE}(O(\log n))$	„Nichtdet. logarithmischer Platz“
LINSPACE	$= \mathrm{DSPACE}(O(n))$	„Linearer Platz“
PSPACE	$= \mathrm{DSPACE}(n^{O(1)})$	„Polynomieller Platz“
EXPSPACE	$= \mathrm{DSPACE}(2^{n^{O(1)}})$	„Exponentialer Platz“

Elementare Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen

Frage

Welche elementaren Beziehungen gelten zwischen den verschiedenen Zeit- und Platzklassen?

Satz

- Für jede Funktion $s(n) \geq \log n$ gilt

  $$\mathrm{DSPACE}(s) \subseteq \mathrm{NSPACE}(s) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{O(s)}).$$

- Für jede Funktion $t(n) \geq n + 2$ gilt

  $$\mathrm{DTIME}(t) \subseteq \mathrm{NTIME}(t) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t).$$

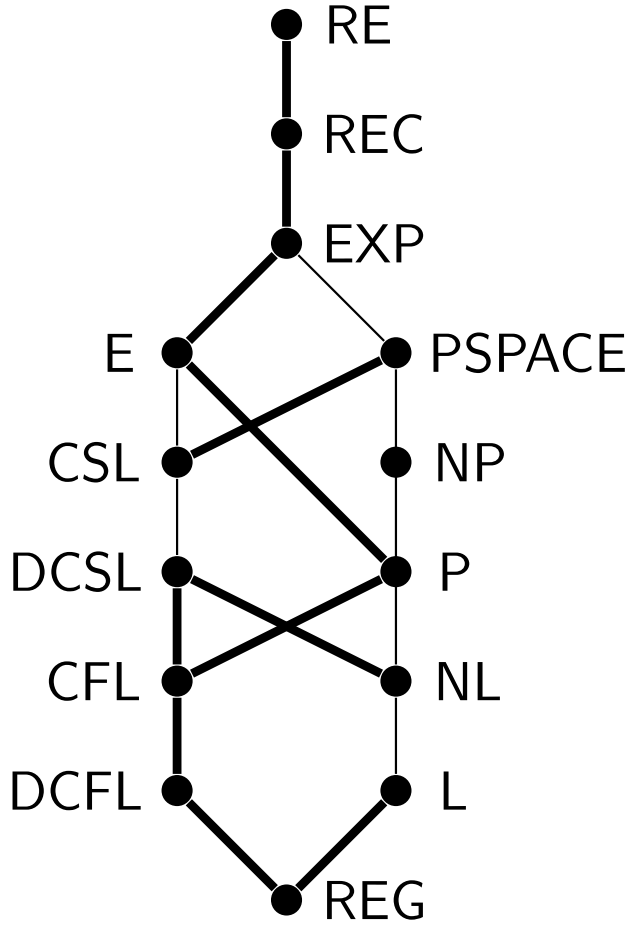
Korollar

Es gilt $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$.

Komplexitätsschranken für die Stufen der Chomsky-Hierarchie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{REG} &= \mathrm{DSPACE}(O(1)) = \mathrm{NSPACE}(O(1)) \subsetneq \mathrm{L},\\
\mathrm{DCFL} &\subsetneq \mathrm{LINTIME},\\
\mathrm{CFL} &\subsetneq \mathrm{NLINTIME} \cap \mathrm{DTIME}(O(n^3)) \subsetneq \mathrm{P},\\
\mathrm{DCSL} &= \mathrm{LINSPACE} \subseteq \mathrm{CSL},\\
\mathrm{CSL} &= \mathrm{NLINSPACE} \subseteq \mathrm{PSPACE} \cap \mathrm{E},\\
\mathrm{REC} &= \bigcup_f \mathrm{DSPACE}(f(n))\\
&= \bigcup_f \mathrm{NSPACE}(f(n))\\
&= \bigcup_f \mathrm{DTIME}(f(n))\\
&= \bigcup_f \mathrm{NTIME}(f(n)),
\end{aligned}
$$

wobei f alle (oder äquivalent: alle berechenbaren) Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durchläuft.



Das P-NP-Problem

- Wie wir gesehen haben, sind NTMs nicht mächtiger als DTMs, d.h. jede NTM kann von einer DTM simuliert werden.
- Die Frage, wieviel Zeit eine DTM zur Simulation einer NTM benötigt, ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik.
- Wegen $\mathrm{NTIME}(t) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t) \subseteq \mathrm{NSPACE}(t) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{O(t)})$ erhöht sich die Laufzeit im schlimmsten Fall exponentiell.
- Insbesondere die Klasse NP enthält viele für die Praxis überaus wichtige Probleme, für die kein Polynomialzeitalgorithmus bekannt ist.
- Da jedoch nur Probleme in P als effizient lösbar angesehen werden, hat das so genannte P-NP-Problem, also die Frage, ob alle NP-Probleme effizient lösbar sind, eine immense praktische Bedeutung.
- Wie bereits erwähnt, ist diese Frage für die Platzkomplexität bereits gelöst (Satz von Savitch, 1970).

Die Polynomialzeitreduktion

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist auf $B \subseteq \Gamma^*$ in Polynomialzeit reduzierbar ($A \leq^p B$), falls eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ in FP existiert mit

  $$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

- Eine Sprache A heißt $\leq^p$-hart für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: $\mathcal{C}$-hart oder $\mathcal{C}$-schwer), falls gilt:

  $$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq^p A.$$

- Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache A, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt $\mathcal{C}$-vollständig.
- NPC bezeichnet die Klasse aller NP-vollständigen Sprachen.

Lemma

- Aus $A \leq^p B$ folgt $A \leq B$.
- Die Reduktionsrelation $\leq^p$ ist reflexiv und transitiv (s. Übungen).

Die Polynomialzeitreduktion

Satz

Die Klassen P und NP sind unter $\leq^p$ abgeschlossen.

Beweis

- Sei $B \in \mathrm{P}$ und gelte $A \leq^p B$ mittels einer Funktion $f \in \mathrm{FP}$.
- Seien M und T DTMs mit $L(M) = B$ und $T(x) = f(x)$.
- Weiter seien p und q polynomielle Zeitschranken für M und T.
- Betrachte die DTM M', die bei Eingabe x zuerst T simuliert, um $f(x)$ zu berechnen, und danach M bei Eingabe $f(x)$ simuliert.
- Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M').$$

- Also ist $L(M') = A$ und wegen

$$time_{M'}(x) \leq time_T(x) + time_M(f(x)) \leq q(|x|) + p(q(|x|))$$

ist M' polynomiell zeitbeschränkt und somit A in P. □

NP-Vollständigkeit

Satz

1. $A \leq^p B$ und A ist NP-hart $\Rightarrow$ B ist NP-hart.
2. $A \leq^p B$, A ist NP-hart und $B \in \mathrm{NP}$ $\Rightarrow$ $B \in \mathrm{NPC}$.
3. $\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Beweis

1. Da A NP-hart ist, ist jede NP-Sprache L auf A reduzierbar.
   Da zudem $A \leq^p B$ gilt und $\leq^p$ transitiv ist, folgt $L \leq^p B$.
2. Klar, da B mit (1) NP-hart und nach Voraussetzung in NP ist.
3. Sei B eine NP-vollständige Sprache in P. Dann ist jede NP-Sprache A auf B reduzierbar und da P unter $\leq^p$ abgeschlossen ist, folgt $A \in \mathrm{P}$. □

NP-Vollständigkeit

Satz

Folgende Sprache ist NP-vollständig:

$$L = \left\{ w\#x\#0^m \;\middle|\; \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine NTM,} \\ \text{die } x \text{ in } \leq m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

Beweis

- Zunächst ist klar, dass $L \in$ NP mittels folgender NTM M ist:

  M simuliert bei Eingabe $w\#x\#0^m$ die NTM M_w bei Eingabe x für höchstens m Schritte. Falls M_w in dieser Zeit akzeptiert, akzeptiert M ebenfalls, andernfalls verwirft M.

- Sei nun A eine beliebige NP-Sprache. Dann ist A in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0,1\}^*$ in NP reduzierbar (siehe Übungen).
- Sei M_w eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte NTM für B.
- Dann reduziert folgende FP-Funktion f die Sprache B auf L:

  $f : x \mapsto w\#x\#0^{p(|x|)}$.

□