Übungsblatt 13

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 26.–29. 01. 2010
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 2. 2. 2010

Aufgabe 102 ***mündlich***

Für eine Reihe von algorithmischen Problemstellungen wurden 6 verschiedene Algorithmen mit folgenden Laufzeiten entworfen ($\log n$ steht als Abkürzung für $\lceil \log_2 n \rceil$):

Algorithmus	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Laufzeit	$5 \cdot 10^8 n$	$10^5 n \log n$	$10^3 n^2$	$10 \cdot 2^{n/2}$	2^{2n}	$n!$

Die Algorithmen werden auf einem Rechner implementiert, der mit einer Geschwindigkeit von 10^9 Operationen pro Sekunde arbeitet.

(a) Bestimmen Sie jeweils die maximale Länge n_1 der Probleminstanzen, die mit diesen Algorithmen innerhalb einer Minute lösbar sind.

(b) Sei n_2 die maximale Eingabelänge, die ein Rechner mit k-facher Geschwindigkeit in dieser Zeit bewältigt. Welche Beziehung besteht jeweils zwischen n_1 und n_2?

Aufgabe 103 ***mündlich***

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$. Beschreiben Sie eine möglichst zeiteffiziente 1-DTM M und eine möglichst zeiteffiziente 2-DTM M' für L. Vergleichen Sie die Laufzeiten von M und M' bei Eingaben der Länge n.

Aufgabe 104 ***10 Punkte***

Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\sum_{i=1}^n i = \mathcal{O}(n^2)$ *(mündlich)*

(b) $f(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ *(mündlich)*

(c) $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$ *(mündlich)*

(d) $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(mündlich)*

(e) $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$ *(mündlich)*

(f) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f^2(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$ *(mündlich)*

(g) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f(n^2) = \mathcal{O}(g(n^2))$ *(5 Punkte)*

(h) $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 105 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{L}$,

(b) $\mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{P}$,

(c) $\mathsf{L} \not\subseteq \mathsf{CFL}$.

Aufgabe 106 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{n^2})$, *(mündlich)*

(b) $\mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$. *(10 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Diagonalsprache

$$D = \{w \mid M_w \text{ ist eine DTM, die } w \text{ in höchstens } 2^{|w|^2} \text{ Schritten verwirft}\}$$

in EXP, aber nicht in $\mathsf{DTIME}(2^{n^2})$ entscheidbar ist.

Aufgabe 107 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Jede Sprache $A \in \mathsf{DTIME}(t(n))$ ist in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0,1\}^*$ in $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(t(n)))$ reduzierbar.

(b) Die Sprache

$$L = \left\{ w\#x\#bin(m) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine } k\text{-DTM, die} \\ x \text{ in höchstens } m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

ist EXP-vollständig ($bin(m)$ bezeichne die Binärdarstellung von m).

(c) Der Abschluss von E unter $\leq^p$ ist EXP (d.h. $\mathsf{EXP} = \{A \mid \exists B \in \mathsf{E} : A \leq^p B\}$).

(d) E ist nicht unter $\leq^p$ abgeschlossen (also ist $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E}$ und $\mathsf{E} \neq \mathsf{NP}$).

Hinweis: Verwenden Sie die Separation $\mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$ (siehe Aufgabe 106).

Aufgabe 108 ***5 Punkte***

Eine boolesche Formel F heißt **monoton**, falls sie nur mittels $\vee$ und $\wedge$ aus Variablen und Konstanten $(0, 1)$ aufgebaut ist. F heißt **Tautologie**, falls $F(a)$ für alle Belegungen a den Wert 1 annimmt.
Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d.h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d.h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_1 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare monotone Formel}\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \to H\}$, *(mündlich)*

(c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \to H\}$, *(mündlich)*

(d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$, *(mündlich)*

(e) $L_5 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 109 Zeigen Sie: ***5 Punkte***

Die Reduktionsrelation $\leq^p$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.