

Übungsblatt 12

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 19.–22. 01. 2010
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 26. 1. 2010*

Aufgabe 93 Reduzieren Sie PCP auf MPCP.

mündlich

Aufgabe 94

mündlich

Betrachten Sie die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $E = \{q_2\}$ und den Anweisungen

$$\begin{array}{lll} \delta : & q_00 \rightarrow q_11R & (1) \\ & q_0\sqcup \rightarrow q_2\sqcup N & (3) \\ & q_01 \rightarrow q_10R & (2) \\ & q_10 \rightarrow q_00R & (4) \\ & q_1\sqcup \rightarrow q_10L & (6) \end{array} \quad \begin{array}{l} q_11 \rightarrow q_00L & (5) \\ q_10 \rightarrow q_10L & (7) \end{array}$$

- (a) Geben Sie die Rechnung an, die M bei Eingabe $w = 0110$ ausführt.
- (b) Sei $\Sigma' = \Gamma \cup Z \cup \{\langle, \rangle\}$ und sei f die in der Vorlesung definierte Funktion, die die Sprache $L(M)$ auf die Sprache $\text{MPCP}_{\Sigma'}$ reduziert. Geben Sie für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ explizit die zugehörige MPCP-Instanz $f(w)$ an.
- (c) Welche Lösungen hat die MPCP-Instanz $f(0110)$? Begründen Sie.

Aufgabe 95

mündlich, optional

- (a) Zeigen Sie, dass PCP über einem unären Alphabet entscheidbar ist.
- (b) Sei $\text{PCP}^{\leq k}$ die Einschränkung von PCP auf Instanzen mit höchstens k Wortpaaren. Ist $\text{PCP}^{\leq k}$ für jedes $k \geq 1$ entscheidbar? Begründen Sie.

Aufgabe 96 Zeigen Sie die Entscheidbarkeit folgender Probleme. *mündlich*

- (a) Das Äquivalenz-, Schnitt- und Inklusionsproblem für reguläre Sprachen.
- (b) Das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen.

Aufgabe 97

mündlich

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^* entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.

Aufgabe 98 Zeigen Sie:

Die Komplexitätsklassen P und NP sind abgeschlossen unter

- (a) Vereinigung, *(mündlich)*
- (b) Schnitt, *(mündlich)*
- (c) Produkt und *(mündlich)*
- (d) Sternhülle. *(10 Punkte)*

mündlich, optional

Zeigen Sie, dass folgendes Problem RE-vollständig ist.

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G .

Gefragt: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Hinweis: Reduzieren Sie das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf dieses Entscheidungsproblem.

Aufgabe 100

20 Punkte

Für eine Folge $s = (x_1, \dots, x_k)$ von Binärstrings x_i sei L_s die Sprache

$$\{a^{i_n}b \cdots a^{i_1}bx_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

und für zwei solche Folgen s und t sei $L_{s,t}$ die Sprache $L_s \cap L_t$. Zeigen Sie:

- (a) L_s und L_t sind in DCFL und $L_{s,t}$ ist in co-CFL. *(10 Punkte)*
- (b) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig. *(5 Punkte)*
- (c) Das Problem, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = L(G)^R$ ist, ist co-RE-vollständig. *(5 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie die Äquivalenz $L_{s,t} = L_{s,t}^R \Leftrightarrow L_{s,t} = \emptyset$.

Aufgabe 101

20 Zusatzpunkte

(a) Die Quersumme einer PCP-Lösung $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ sei $s(\alpha) = \sum_{j=1}^n i_j$. Berechnen Sie die Länge n_{\min} der kürzesten Lösung α_{\min} für die Instanz

$$I = \begin{pmatrix} aaba & baab & a \\ a & aa & aab \end{pmatrix}$$

sowie $s(\alpha_{\min})$. *Hinweis:* n_{\min} ist eine 3-stellige Dezimalzahl. *(5 Zusatzpunkte)*

- *(b) Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^{**} entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_n und j_1, \dots, j_n mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie das Komplement von PCP^{**} auf das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen. *(15 Zusatzpunkte)*