

Übungsblatt 12

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 19.–22. 01. 2010
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 26. 1. 2010

Aufgabe 93 Reduzieren Sie PCP auf MPCP. *mündlich*

Aufgabe 94 *mündlich*

Betrachten Sie die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $E = \{q_2\}$ und den Anweisungen

$$\delta : \quad q_0 0 \rightarrow q_1 1 R \quad (1) \quad q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup N \quad (3) \quad q_1 1 \rightarrow q_0 0 L \quad (5)$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 0 R \quad (2) \quad q_1 0 \rightarrow q_0 0 R \quad (4) \quad q_1 \sqcup \rightarrow q_1 0 L \quad (6)$$

- (a) Geben Sie die Rechnung an, die M bei Eingabe $w = 0110$ ausführt.
(b) Sei $\Sigma' = \Gamma \cup Z \cup \{\langle, |, \rangle\}$ und sei f die in der Vorlesung definierte Funktion, die die Sprache $L(M)$ auf die Sprache $\text{MPCP}_{\Sigma'}$ reduziert. Geben Sie für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ explizit die zugehörige MPCP-Instanz $f(w)$ an.
(c) Welche Lösungen hat die MPCP-Instanz $f(0110)$? Begründen Sie.

Aufgabe 95 *mündlich, optional*

- (a) Zeigen Sie, dass PCP über einem unären Alphabet entscheidbar ist.
(b) Sei $\text{PCP}^{\leq k}$ die Einschränkung von PCP auf Instanzen mit höchstens k Wortpaaren. Ist $\text{PCP}^{\leq k}$ für jedes $k \geq 1$ entscheidbar? Begründen Sie.

Aufgabe 96 Zeigen Sie die Entscheidbarkeit folgender Probleme. *mündlich*

- (a) Das Äquivalenz-, Schnitt- und Inklusionsproblem für reguläre Sprachen.
(b) Das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen.

Aufgabe 97 *mündlich*

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^* entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.

Aufgabe 98 Zeigen Sie: *10 Punkte*

Die Komplexitätsklassen P und NP sind abgeschlossen unter

- (a) Vereinigung, *(mündlich)*
(b) Schnitt, *(mündlich)*
(c) Produkt und *(mündlich)*
(d) Sternhülle. *(10 Punkte)*

Aufgabe 99 *mündlich, optional*

Zeigen Sie, dass folgendes Problem RE-vollständig ist.

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G .

Gefragt: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Hinweis: Reduzieren Sie das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf dieses Entscheidungsproblem.

Aufgabe 100 *20 Punkte*

Für eine Folge $s = (x_1, \dots, x_k)$ von Binärstrings x_i sei L_s die Sprache

$$\{a^{i_n} b \cdots a^{i_1} b x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

und für zwei solche Folgen s und t sei $L_{s,t}$ die Sprache $L_s \cap L_t$. Zeigen Sie:

- (a) L_s und L_t sind in DCFL und $L_{s,t}$ ist in co-CFL. *(10 Punkte)*
(b) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig. *(5 Punkte)*
(c) Das Problem, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = L(G)^R$ ist, ist co-RE-vollständig. *(5 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie die Äquivalenz $L_{s,t} = L_{s,t}^R \Leftrightarrow L_{s,t} = \emptyset$.

Aufgabe 101 *20 Zusatzpunkte*

- (a) Die Quersumme einer PCP-Lösung $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ sei $s(\alpha) = \sum_{j=1}^n i_j$. Berechnen Sie die Länge n_{\min} der kürzesten Lösung α_{\min} für die Instanz

$$I = \begin{pmatrix} aaba & baab & a \\ a & aa & aab \end{pmatrix}$$

sowie $s(\alpha_{\min})$. *Hinweis:* n_{\min} ist eine 3-stellige Dezimalzahl. *(5 Zusatzpunkte)*

- *(b) Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^{**} entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_n und j_1, \dots, j_n mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie das Komplement von PCP^{**} auf das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen. *(15 Zusatzpunkte)*