

## Übungsblatt 8

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 8.–11. 12. 2009*  
*Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 15. 12. 2009*

### Aufgabe 57 mündlich

Ein PDA  $M$  heißt *deterministisch*, wenn seine Überführungsrelation  $\vdash_M$  rechtseindeutig ist (d.h. es gilt  $K \vdash_M K_1 \wedge K \vdash_M K_2 \Rightarrow K_1 = K_2$ ).

Zeigen Sie, dass ein PDA  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$  genau dann deterministisch ist, wenn  $\delta$  für alle  $q \in Z$ ,  $a \in \Sigma$  und  $A \in \Gamma$  die Bedingung  $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$  erfüllt.

### Aufgabe 58 mündlich

Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$  und  $\bar{L}$  an, d.h.  $L \in \text{CFL} \cap \text{co-CFL}$ . (*Bemerkung:*  $L$  ist aber nicht in DCFL.)

### Aufgabe 59 5 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass deterministische Kellerautomaten durch Leeren des Kellers genau die präfixfreien Sprachen in DCFL akzeptieren. (mündlich)

(b) Zeigen Sie, dass Kellerautomaten mit Endzuständen genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren (also gilt  $\text{DCFL} \subseteq \text{CFL}$ ). (5 Punkte)

### \*Aufgabe 60 mündlich, optional

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache in DCFL. Zeigen Sie, dass für jedes Zeichen  $a \in \Sigma$  auch die folgende Sprache in DCFL ist:  
 $L_{-a} = \{x \in (\Sigma - \{a\})^* \mid x \in L \text{ oder } xa \in L\}$ .

### Aufgabe 61 mündlich

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  und sei  $\$ \notin \Sigma$ . Zeigen Sie:

(a)  $L\{\$\}$  ist präfixfrei.

(b)  $L$  ist genau dann in DCFL, wenn  $L\{\$\}$  in DCFL ist.

(c)  $L$  ist genau dann in DCFL, wenn  $L\{\$\}$  von einem deterministischen PDA durch Leeren des Kellers akzeptiert wird.

### Aufgabe 62 10 Punkte

Zeigen Sie:

(a) Die Klasse DCFL ist unter dem min-Operator abgeschlossen. (mündlich)

(b) CFL ist nicht unter dem min-Operator abgeschlossen. (5 Punkte)

*Hinweis:* Betrachten Sie die Sprache  $\{a^i b^j c^k \mid i \leq k \text{ oder } j \leq k\}$ .

(c) DCFL ist nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen. (5 Punkte)

*Hinweis:* Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung geführten Beweis, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da zwar  $L_0^*$  und  $L = L_0 L_3 \cup L_4$  (siehe Aufgabe 63) in DCFL sind, nicht aber  $L_0^* L$ , und finden Sie eine Sprache  $L'$ , so dass zwar  $L_0 \cup L'$ , aber nicht  $(L_0 \cup L')^*$  in DCFL ist.

### Aufgabe 63 mündlich

(a) Geben Sie DPDAs für die Sprachen  $L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$  und  $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$  an. (*Bemerkung:* Da  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \text{CFL}$  ist, sind also weder CFL noch DCFL unter Durchschnitt abgeschlossen.)

(b) Seien  $L_0 = \{0\}$ ,  $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$  und  $L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$ . Zeigen Sie, dass die Sprache  $L = L_0 L_3 \cup L_4 \in \text{DCFL}$  ist, nicht jedoch  $L^R$ .

(c) Zeigen Sie, dass CFL im Gegensatz zu DCFL unter Spiegelung abgeschlossen ist.

### Aufgabe 64 5 Punkte

Eine kontextfreie Sprache  $L$  heißt (*inhärent*) *mehrdeutig*, falls jede kontextfreie Grammatik für  $L$  mehrdeutig ist. Wir nennen  $L$  *eindeutig*, wenn  $L$  nicht mehrdeutig ist. Zeigen Sie:

(a) Die Sprache  $(L_0 L_3 \cup L_4)^R$  (siehe Aufgabe 63) ist eindeutig (es gibt also eindeutige Sprachen in  $\text{CFL} - \text{DCFL}$ ). (mündlich)

(b) Jede deterministisch kontextfreie Sprache  $L \in \text{DCFL}$  ist eindeutig. (5 Punkte)

*Hinweis:* Konstruieren Sie aus einem deterministischen PDA  $M$ , der die präfixfreie Sprache  $L\{\$\}$  durch Leeren des Kellers akzeptiert (siehe Aufgabe 61), eine eindeutige kontextfreie Grammatik für  $L\{\$\}$  und daraus eine für  $L$ .

*Bemerkung:* Die Sprache  $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k\}$  ist inhärent mehrdeutig (die eindeutigen kontextfreien Sprachen liegen also echt zwischen DCFL und CFL).

### Aufgabe 65 mündlich, optional

(a) Zeigen Sie, dass ein DPDA  $M$  bei Eingabe  $x$  höchstens linear viele (d.h. höchstens  $c|x| + c$  für eine von  $M$  abhängige Konstante  $c$ ) Rechenschritte macht, falls  $M$  alle Eingaben zu Ende liest.

(b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der für einen DPDA  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#, E)$  und eine Konfiguration der Form  $K = (p, \varepsilon, A)$  mit  $A \in \Gamma$  entscheidet, ob  $M$  ausgehend von  $K$  unendlich lange rechnet.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass sich  $M$  nach  $(k+1)^{m^2 l}$  Schritten in einer  $\infty$ -Schleife befinden muss, wobei  $m = \|\Sigma\|$ ,  $l = \|\Gamma\|$  und  $k$  die maximale Anzahl der in einem Rechenschritt eingekellerten Symbole ist.

### Aufgabe 66 10 Punkte

Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$  ein PDA mit  $Z = \{q, q', p\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{A, \#\}$  und

$\delta: qa\# \rightarrow qA\#, qaA \rightarrow qAA, qbA \rightarrow q', q'bA \rightarrow q', q'\varepsilon\# \rightarrow p$ .

(a) Ist  $M' = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#, \{p\})$  ein DPDA? Begründen Sie. (2 Punkte)

(b) Geben Sie explizite Beschreibungen für  $L(M)$  und  $L(M')$  an. (2 Punkte)

(c) Transformieren Sie  $M'$  mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen DPDA für das Komplement von  $L(M')$ . (6 Punkte)