Übungsblatt 7

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 1.–4. 12. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 8. 12. 2009

Aufgabe 48 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie. ***mündlich***

(a) Für kontextfreie Sprachen A, B sind auch $A \setminus B$ und $A \Delta B$ kontextfrei.

(b) Falls A, B kontextfreie Sprachen mit $A = BC$ sind, dann ist auch C kontextfrei.

(c) Falls A kontextfrei ist und $A \subseteq B$ gilt, dann kann B regulär sein.

(d) Eine kontextfreie Grammatik in CNF ist immer eindeutig.

Aufgabe 49 ***10 Punkte***

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Begründen Sie.

(a) $L_1 = \{a^l b^m a^n \mid m \leq \max(l, n)\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w) < \#_c(w)\}$, *(mündlich)*

(c) $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$, *(5 Punkte)*

(d) $L_4 = \{baba^2ba^3b \cdots ba^{n-1}ba^nb \mid n \geq 1\}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 50 ***10 Punkte***

(a) Sei A eine kontextfreie und B sei eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann $A \cap B$ kontextfrei ist. Müssen dann auch die Sprachen $A \setminus B$ und $A \Delta B$ kontextfrei sein? *(7 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen nicht unter dem *perm*-Operator (siehe Aufgabe 41) abgeschlossen ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 51 ***mündlich***

Die Funktion l_{reg} (l_{kfr}) weise einer Sprache L, die die Konklusion des Pumping-Lemmas für reguläre (kontextfreie) Sprachen erfüllt, ihre Pumpingzahl und allen anderen Sprachen den Wert ∞ zu. Eine Sprache $T \subseteq \Sigma^*$ über einem *unären* Alphabet $\Sigma = \{a\}$ heißt *tally*. Zeigen Sie:

(a) Für jede Sprache L gilt $l_{kfr}(L) \leq l_{reg}(L)$.

(b) Für jede tally Sprache T gilt $l_{kfr}(T) = l_{reg}(T)$.

(c) Für jede tally Sprache $T \subseteq \{a\}^*$ mit $l = l_{reg}(T) < \infty$ gilt: Falls a^n, $n \geq l$, zu T gehört, so enthält T auch alle Wörter $a^{n+il!}$, $i \geq 1$.

(d) Eine tally Sprache T ist genau dann regulär, wenn $l_{reg}(T) < \infty$ ist.

(e) Es gibt keine tally Sprache in $\mathsf{CFL} - \mathsf{REG}$.

Aufgabe 52 Zeigen Sie mittels der Sprache ***5 Punkte***

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ oder } j = k = l\},$$

dass die Umkehrung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 53 ***mündlich***

Welche Sprachen können von PDAs erkannt werden, die Überführungsfunktionen der Form $\delta\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^*)$ haben?

Aufgabe 54 ***mündlich, optional***

Ein EPDA (extended PDA) ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$. Dabei haben Z, Σ, Γ und q_0 die gleiche Funktion wie bei einem PDA und $E \subseteq Z$ ist eine Menge von Endzuständen. Die Überführungsfunktion hat die Form

$$\delta\colon Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*),$$

wobei $\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Analog zum PDA überführt eine Anweisung $qu\alpha \to p\gamma$ die Konfiguration $(q, uv, \alpha\beta)$ in die Folgekonfiguration $(p, v, \gamma\beta)$ (in Zeichen: $(q, uv, \alpha\beta) \vdash (p, v, \gamma\beta)$). Das Kelleranfangszeichen entfällt. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in E : (q_0, x, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{L(M) \mid M \text{ ist ein EPDA}\} = \mathsf{CFL}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass ohne die Bedingung „$\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem EPDA erkannt wird.

Aufgabe 55 Betrachten Sie die Sprache ***mündlich***

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}.$$

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.

(b) Wandeln Sie G in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ um.

(c) Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *abbab* von Ihrer Grammatik G' erzeugt wird.

Aufgabe 56 ***5 Punkte***

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, L, R\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und den Regeln

$$P\colon\ S \to LR, SS, a;\ L \to a;\ R \to SR, b.$$

(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(G)$ an.

(b) Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um die Zugehörigkeit von $aaaabb = a^4b^2$ zu $L(G)$ zu testen.