

Probeklausur: Lösungsvorschläge

Besprechung am 10.–13. 2. 2009 in den Übungen

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Dienstag, 24.02.2009 um 9 Uhr in RUD26, 0'115 statt.
- Voraussetzung zur Teilnahme ist der Übungsschein.
- Die Bearbeitungszeit der Aufgaben wird 120 Minuten betragen.
- Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Bitte bringen Sie zur Klausur Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.

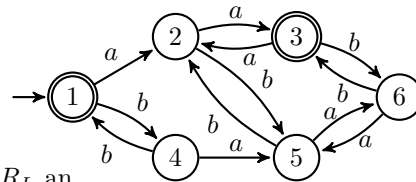
Hinweis zur Probeklausur:

- Für die Probeklausur sollten Sie von einer Bearbeitungszeit von 180 Minuten ausgehen (d. h. 1 Punkt entspricht 1 Minute).

Aufgabe 1 Sei L die von dem DFA M erkannte Sprache:

25 Punkte

- Geben Sie für jedes Wortpaar $x, y \in \{\varepsilon, aa, abb, bbb\}$ an, ob xR_Ly gilt oder nicht. Begründen Sie.
- Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
- Geben Sie ein Repräsentantensystem für R_L an.



Lösung:

- Zunächst einmal ist R_L reflexiv, sodass $(\varepsilon, \varepsilon), (aa, aa), (abb, abb), (bbb, bbb) \in R_L$. Außerdem ist R_L symmetrisch, sodass im Folgenden nur $x < y$ zu betrachten ist.
 - $(\varepsilon, aa) \in R_L$: Kommt in einer Fortsetzung z mindestens ein a vor, treffen sich die Rechnungen in Zustand 2 oder 5. Kommen in einer Fortsetzung z nur b s vor, wechseln die Rechnungen zwischen den Zuständen 1 und 4 beziehungsweise 3 und 6, wobei jeweils das gleiche Akzeptanzverhalten resultiert.
 - $(\varepsilon, abb) \notin R_L$: Wähle $z = \varepsilon$. Dann ist $\varepsilon z = \varepsilon \in L$, aber $abbz = abb \notin L$.
 - $(\varepsilon, bbb) \notin R_L$: Wähle $z = \varepsilon$. Dann ist $\varepsilon z = \varepsilon \in L$, aber $bbbz = bbb \notin L$.
 - $(abb, bbb) \notin R_L$: Wähle $z = a$. Dann ist $abbz = abba \in L$, aber $bbbz = bbba \notin L$.

Wegen der Transitivität von R_L gilt $\varepsilon R_L y \Leftrightarrow aa R_L y$.

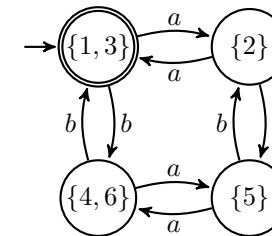
- Folgende Tabelle gibt an, welche Zustände nicht verschmelzbar sind (es ist jeweils die Runde angegeben, in der dies erkannt wird):

	2	3	4	5	6
1	0		0	0	0
2		0	1	1	1
3			0	0	0
4				1	
5					1

Dabei wird

- $\{2, 4\}$ hinzugenommen, da $\{\delta(2, a), \delta(4, a)\} = \{3, 5\} \in D_0$
- $\{2, 5\}$ hinzugenommen, da $\{\delta(2, a), \delta(5, a)\} = \{3, 6\} \in D_0$
- $\{2, 6\}$ hinzugenommen, da $\{\delta(2, a), \delta(6, a)\} = \{3, 5\} \in D_0$
- $\{4, 5\}$ hinzugenommen, da $\{\delta(4, b), \delta(5, b)\} = \{1, 2\} \in D_0$
- $\{5, 6\}$ hinzugenommen, da $\{\delta(5, b), \delta(6, b)\} = \{2, 3\} \in D_0$

Nach Runde 1 kommen keine weiteren Paare hinzu. Es können also die Zustände 1 und 3 sowie 4 und 6 verschmolzen werden:



- $\{\varepsilon, a, b, ab\}$ ist ein Repräsentantensystem, da jeder Zustand im Minimal-DFA von genau einem dieser Wörter erreicht wird.

Aufgabe 2

30 Punkte

Arithmetische Ausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{1, +, -, [,]\}$ und ihre Werte sind induktiv wie folgt definiert:

- 1 ist ein arithmetischer Ausdruck mit dem Wert $val(1) = 1$.
- Falls A und A' arithmetische Ausdrücke sind, so sind auch $[A + A']$ und $[A - A']$ arithmetische Ausdrücke mit den folgenden Werten:

$$val([A + A']) = val(A) + val(A') \text{ und } val([A - A']) = val(A) - val(A').$$

- (a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für die Sprache L aller arithmetischen Ausdrücke über Σ an.

Lösung:

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A\}$, und P gegeben durch

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow 1 & A \rightarrow +S \\ S \rightarrow [SA & A \rightarrow -S \end{array}$$

- (b) Geben Sie für L einen DPDA M an.

Lösung:

$M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S, \{q\})$ mit $\Gamma = \{S, A, \]\}$ und δ gegeben durch

$$\begin{array}{lll} q1S \rightarrow q\varepsilon & q+A \rightarrow qS] & q]] \rightarrow q\varepsilon \\ q[S \rightarrow qSA & q-A \rightarrow qS] & \end{array}$$

- (c) Zeigen Sie, dass die Sprache $L_0 = \{x \in L \mid \text{val}(x) = 0\} \notin \text{CFL}$ ist.

Lösung:

Angenommen L_0 ist kontextfrei. Dann existiert eine Pumpingzahl l für L_0 . Betrachte das Wort $z = [([1+]^l()^l - (]^l1(+1)^l] \in L_0$. Dann existiert eine Aufteilung $z = uvwxy$ mit

- (1) $vx \neq \varepsilon$
- (2) $|vwx| \leq l$
- (3) $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L_0$

Wir führen nun dies zu einem Widerspruch: Zunächst einmal kann vwx nicht das »-« in der Mitte überspannen, da sonst nach dem Pumpen der Ausdruck nicht mehr korrekt geklammert wäre oder mehrere »-« hintereinander hätte. Also muss entweder die erste oder die zweite Hälfte gepumpt werden. Dies ist aber nicht möglich, da beim syntaktisch korrekten Pumpen eines Ausdrucks ohne »-« dessen Wert verändert wird.

Aufgabe 3

15 Punkte

Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für $L = \{x\#x^R\#x \mid x \in \{a, b\}^*\}$ an.

Lösung:

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T_1, T_2, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, \#\}$ und P gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow T_1T_2 & Aa \rightarrow aA & Ba \rightarrow aB \\ T_1 \rightarrow aAT_1a & Ab \rightarrow bA & Bb \rightarrow bB \\ T_1 \rightarrow bBT_1b & A\# \rightarrow \#A & B\# \rightarrow \#B \\ T_1 \rightarrow \# & AT_2 \rightarrow T_2a & BT_2 \rightarrow T_2b \\ T_2 \rightarrow \# & & \end{array}$$

Aufgabe 4

25 Punkte

- (a) Für kontextfreie Sprachen A, B ist auch $A - B$ kontextfrei.

Lösung:

Nein. CFL ist nicht unter Komplement abgeschlossen, damit existiert ein $B \in \text{CFL}$ mit $\overline{B} \notin \text{CFL}$. Sei $A = \Sigma^* \in \text{CFL}$. Dann ist $A \setminus B = \overline{B} \notin \text{CFL}$.

- (b) Falls A, B kontextfreie Sprachen mit $A = BC$ sind, dann ist auch C kontextfrei.

Lösung:

Nein. Wähle $A = B = \emptyset$ und $C = H$. Dann ist $A = \emptyset = \emptyset H = BC$, aber $C = H \notin \text{REC} \supset \text{CFL}$.

- (c) Falls A kontextfrei ist und $A \subseteq B$ gilt, dann kann B regulär sein.

Lösung:

Ja. Wähle $B := \Sigma^* \in \text{REG}$.

- (d) Eine kontextfreie Grammatik in CNF ist immer eindeutig.

Lösung:

Nein, denn es gibt inhärent mehrdeutige kontextfreie Sprachen. Alternativ betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln $S \rightarrow SS, S \rightarrow a$. Dann existieren mehrere Linksableitungen für das Wort aaa :

$$\begin{array}{l} S \Rightarrow SS \Rightarrow aS \Rightarrow aSS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaa \\ S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaa \end{array}$$

- (e) Wenn A semi-entscheidbar und B entscheidbar ist, dann ist $B - A$ unentscheidbar.

Lösung:

Nein. Wähle $A = B = \emptyset$. Damit ist $A \in \text{RE}$ und $B \in \text{REC}$, aber auch $B - A = \emptyset \in \text{REC}$.

Aufgabe 5

15 Punkte

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G .

Gefragt: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von zwei Sprachen L_1 und L_2 genau dann nicht leer ist, wenn die Sprache $\{x\#y^R \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ ein Palindrom enthält.

Lösung:

Die Unentscheidbarkeit des angegebenen Problems lässt sich dadurch zeigen, dass man das (unentscheidbare) Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf das angegebene Problem reduziert: Dies ist mit der Reduktion $\langle G_1, G_2 \rangle \mapsto G$ möglich, wobei $G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt aus $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ hervorgeht (hierbei nehmen wir o.B.d.A. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $S \notin V_1 \cup V_2$ an, dies ist möglich

durch Umbenennung; nimm außerdem $\# \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ an):

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ \Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{\#\} \\ P &= P_1 \cup \{A \rightarrow x^R \mid A \rightarrow x \in P_2\} \cup \{S \rightarrow S_1\#S_2\} \end{aligned}$$

Die so konstruierte Grammatik G ist kontextfrei und erzeugt die Sprache $L(G) = \{x\#y^R \mid x \in L(G_1), y \in L(G_2)\}$. Die Korrektheit der Reduktion folgt aus dem Hinweis:

- \Rightarrow : $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow w\#w^R \in L(G)$ ist Palindrom.
- \Leftarrow : Sei $x\#y^R \in L(G)$ ein Palindrom. Dann muss $x = y$ sein und wegen $x \in L_1$ und $y \in L_2$ in $L_1 \cap L_2$ liegen.

Aufgabe 6

30 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden Sprachen, ob sie entscheidbar, rekursiv aufzählbar oder nicht rekursiv aufzählbar sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \neq \emptyset\}$,

Lösung:

Nicht entscheidbar nach dem Satz von Rice (beziehungsweise der in [Aufgabe 91](#) gezeigten Variante), denn die angegebene Eigenschaft ist nichttrivial: Es gibt Turingmaschinen, welche die leere Sprache akzeptieren (z. B. ohne Betrachten der Eingabe sofort verwerfen) und es gibt Turingmaschinen, die nicht-leere Sprachen akzeptieren (z. B. sofort akzeptieren).

Andererseits ist $L_1 \in \text{RE}$, da folgende berechenbare Funktion f die Sprache L_1 aufzählt (w_0 sei ein fester String in L_1):

$$f(v) = \begin{cases} w, & v = \alpha\#w\#x \text{ und } \alpha \text{ kodiert eine akzeptierende Rechnung von } M_w(x) \\ w_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid 0L(M_w) = L(M_w)1\}$,

Lösung:

Nur die leere Sprache erfüllt die Eigenschaft $\mathcal{S} = \{L \subseteq \{0, 1, \#\}^* \mid 0L = L1\}$, denn wenn $L \neq \emptyset$, dann existiert ein lexikographisch kleinstes Wort $x_0 \in L$. Nach Produktbildung mit $\{0\}$ und $\{1\}$ sind $0x_0$ beziehungsweise x_01 die lexikographisch kleinsten Wörter in $0L$ beziehungsweise $L1$. Da aber $0x_0 \neq x_01$ ist (sonst müsste x_0 sowohl Präfix von $0x_0$, also von der Form 0^n , als auch Suffix von x_01 , also von der Form 1^n sein) folgt $0L \neq L1$.

Es gilt also $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) = \emptyset\} = \overline{L_1}$. Damit ist $L_2 \in \text{co-RE} \setminus \text{REC}$ und damit weder entscheidbar noch rekursiv aufzählbar.

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists x \in \{0, 1\}^* : M_w(x) \neq 0\}$,

Lösung:

Nicht entscheidbar nach dem Satz von Rice, da nicht trivial: Der Transducer M_0 berechne die konstante Funktion $f(x) = 0$, der Transducer M_1 berechne die konstante Funktion $g(x) = 1$.

Die Sprache ist auch nicht rekursiv aufzählbar, da $\overline{H_0} \leq L_3$ via $w \mapsto w'$, wobei $M_{w'}$ wie M_w arbeitet, zuvor aber die Eingabe löscht und wenn M_w hält 0 ausgibt. Dann gilt:

$$w \in \overline{H_0} \Leftrightarrow M_w(\varepsilon) \text{ hält nicht} \Leftrightarrow \exists x : M_{w'}(x) \neq 0 \Leftrightarrow w' \in L_3$$

(d) $L_4 = L_1 \cup L_2$,

Lösung:

Wie bereits in (b) festgestellt wurde, ist $L_2 = \overline{L_1}$. Damit ist $L_4 = L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in \text{REC}$ (und auch rekursiv aufzählbar).

(e) $L_5 = L_1 \cap L_2$.

Lösung:

Wegen $L_2 = \overline{L_1}$ gilt $L_5 = L_1 \cap L_2 = \emptyset \in \text{REC}$ (und ist auch rekursiv aufzählbar).

Aufgabe 7

15 Punkte

Zeigen Sie, dass das Problem 5-COLORING, für einen gegebenen Graphen G zu entscheiden, ob er 5-färbbar ist, NP-vollständig ist.

Lösung:

Es ist klar, dass $5\text{-COLORING} \in \text{NP}$: Rate eine Färbung und prüfe, ob sie zulässig ist.

Reduziere $3\text{-COLORING} \leq^p 5\text{-COLORING}$; wegen $3\text{-COLORING} \in \text{NPC}$ folgt dann $5\text{-COLORING} \in \text{NPC}$. Betrachte die Reduktionsfunktion $f : G \mapsto G'$, wobei G' aus G konstruiert wird, indem zwei Knoten hinzugefügt werden, die miteinander und mit allen Knoten von G verbunden sind.

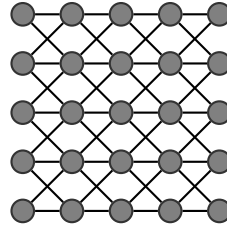
- $G \in 3\text{-COLORING} \Rightarrow f(G) \in 5\text{-COLORING}$: Übernimm die 3-Färbung der Knoten in G und färbe die beiden neuen Knoten mit zwei neuen Farben. Die so entstandene Färbung ist mit allen Kanten in G verträglich (da eine zulässige Färbung vorausgesetzt wurde) und auch die in $f(G)$ hinzugefügten Kanten verbinden nur unterschiedlich gefärbte Knoten.

- $G \in 3\text{-COLORING} \Leftarrow f(G) \in 5\text{-COLORING}$: Betrachte eine zulässige 5-Färbung für $f(G)$. Die beiden neuen Knoten müssen unterschiedlich gefärbt sein (da sie durch eine Kante verbunden sind). Außerdem können die beiden Farben der neuen Knoten in keinem anderen Knoten vorkommen, da sie mit allen verbunden sind. Damit sind die Knoten in G mit 3 Farben färbbar.

Aufgabe 8

25 Punkte

Bestimmen Sie für nebenstehenden Graphen G die folgenden Parameter. Begründen Sie Ihre Antwort.



- (a) $\chi(G) = \min\{k \geq 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$,
- (b) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$,
- (c) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,
- (d) $\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } G\}$,
- (e) $\beta(G) = \min\{\|K\| \mid K \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\}$.

Lösung:

- (a) $\chi(G) = 2$: Alle Kanten verlaufen zwischen benachbarten Spalten. Fassen wir die Knoten in den ungeraden Spalten zur Menge U und die in den geraden Spalten zur Menge W zusammen, so können alle Knoten in U mit 1 und alle Knoten in W mit 2 gefärbt werden. Andererseits ist G nicht 1-färbbar, da G Kanten enthält.
 G ist also bipartit; dies erleichtert die Lösung der folgenden Teilaufgaben.
- (b) $\omega(G) = 2$: Da G Kanten (also 2er-Cliquen) enthält, ist $\omega(G) \geq 2$. Andererseits kann ein bipartiter Graph keine 3er-Clique enthalten, da diese nicht bipartit sind, bipartite Graphen aber unter Teilgraphbildung abgeschlossen sind.
- (c) $\mu(G) = 10$: Die waagrechten Kanten zwischen 1. und 2. sowie 3. und 4. Spalte bilden ein Matching. Größere Matchings sind nicht möglich, da G bipartit ist und die kleinere Partitionsmenge W nur 10 Knoten umfasst.
- (d) $\alpha(G) = 15$: Da die Knoten in U paarweise nicht durch Kanten verbunden sind, ist U stabil. Sobald in einer stabilen Menge S ein Knoten $w \in W$ vorkommt, kann S (unter anderem) den linken Nachbarn von w (welcher zu U gehört) nicht enthalten. Daher kann S nicht mehr Knoten als U enthalten.
- (e) $\beta(G) = 10$: Die Knoten in W überdecken alle Kanten. Da G ein Matching M mit 10 Kanten enthält und zur Überdeckung von M mindestens 10 Knoten benötigt werden, gibt es keine kleinere Kantenüberdeckung als W .

Geben Sie zudem an, ob G eine Eulerlinie, eine Eulertour, einen Hamiltonpfad oder einen Hamiltonkreis besitzt. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung:

- G enthält keine Eulerlinie, da mehr als zwei Knoten ungeraden Grad haben.
- Damit enthält G auch keine Eulertour.
- G enthält keinen Hamiltonpfad, da dieser stets zwischen U und W wechseln muss und sich U und W in der Größe um mehr als 1 unterscheiden.
- Damit enthält G auch keinen Hamiltonkreis.